Uppgift 1

(a) Alla sex primimplikatorer är inringade i Karnaughdiagrammet nedan, tillsammans med sina respektive Booleska uttryck.

f (x_1x_2 \ x_3x_4)	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	1

$A = x_3x_4'$ $\quad$ $D = x_1'x_2x_4$

$B = x_1'x_2'x_4'$ $\quad$ $E = x_1'x_3'x_4$

$C = x_1'x_2x_3$ $\quad$ $F = x_1'x_2'x_3'$

(b) Den enda väsentliga primimplikatorn är $A = x_3x_4'$

(c) Den minimala realiseringen är $f_{\text{MDF}} = A \vee D \vee F = x_3x_4' \vee x_1'x_2x_4 \vee x_1'x_2'x_3'$

(d) Om man utgår från den minimala formen i (c) kan man se att inga termer överlappar, vilket gör att $ab = 0$ i uttrycket $a \vee b = a \oplus b \oplus ab$. Alltså kan (c) skrivas om som:

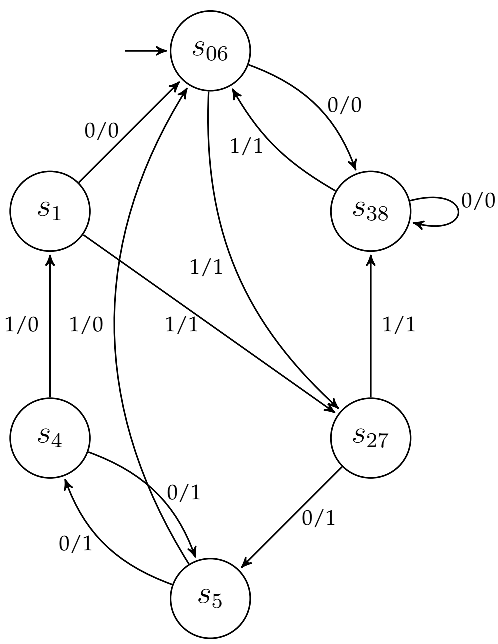
$$\begin{aligned} f_{\text{RMF}} &= x_3x_4' \vee x_1'x_2x_4 \vee x_1'x_2'x_3' = x_3x_4' \oplus x_1'x_2x_4 \oplus x_1'x_2'x_3' \\ &= 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_4 \oplus x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4 \end{aligned}$$

Uppgift 2

(a) Genom att använda RF-algoritmen får vi stegvis

$$\begin{aligned} &P_0 : \{s_0, s_1, s_3, s_6, s_8\}, \{s_2, s_7\}, \{s_4, s_5\} \\ &P_1 : \{s_0, s_1, s_6\}, \{s_3, s_8\}, \{s_2, s_7\}, \{s_4, s_5\} \\ &P_2 : \{s_0, s_6\}, \{s_1\}, \{s_3, s_8\}, \{s_2, s_7\}, \{s_4, s_5\} \\ &P_3 : \{s_0, s_6\}, \{s_1\}, \{s_3, s_8\}, \{s_2, s_7\}, \{s_4\}, \{s_5\} \\ &P_4 : \{s_0, s_6\}, \{s_1\}, \{s_3, s_8\}, \{s_2, s_7\}, \{s_4\}, \{s_5\} \end{aligned}$$

Eftersom $P_3 = P_4$ är vi färdiga. Den minimala formen av tillståndsgrafen kan nu ritas enligt följande

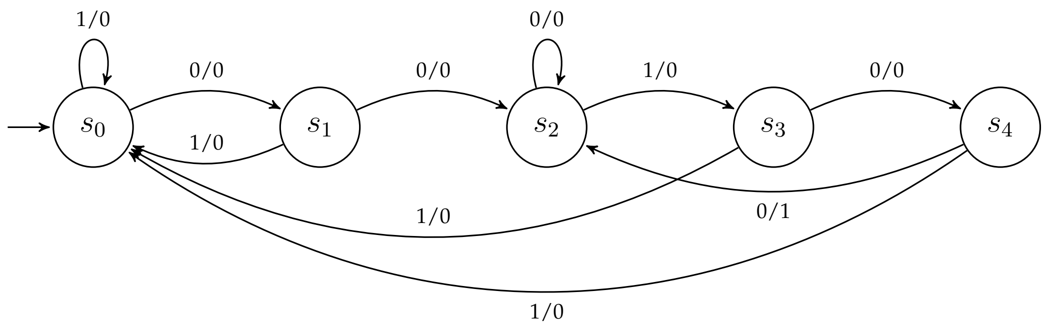


(b) Det minimala antalet D-element som behövs minskar med 1. Det minimala antalet D-element för ursprungsgrafen är $\lceil log_2(9) \rceil = 4$. Det minimala antalet D-element för den minimerade grafen är $\lceil log_2(6) \rceil = 3$.

(c) På disjunktiv normalform består funktionen av en OR-summa av mintermer. Dessa svarar mot hörnen i en kub och har således dimensionen 0.

Uppgift 3

(a) En tillståndsgraf som löser Mirandas problem är följande



En tillståndsgraf som ska kunna detektera en följd av längden 5 måste minst ha 5 tillstånd. Således är grafen ovan minimal.

(b) Tillståndskodningen ger upphov till följande Karnaughdiagram

q_1^+ (q_1q_2 \ x_1x_2)	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	1

q_2^+ (q_1q_2 \ x_1x_2)	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	1
11	1	1	0	0
10	0	0	1	0

u (q_1q_2 \ x_1x_2)	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	1	0	0	0
10	1	1	0	0

Således kan tillståndsvariablerna och utsignalen skrivas på minimal disjunktiv form som

$$
\begin{aligned}
q_1^+ &= q_1 q_2 \vee q_2 x_2 \vee q_2^{'} x_1 x_2^{'} \\
q_2^+ &= q_1^{'} x_1^{'} \vee q_2 x_1^{'} \vee q_1 q_2^{'} x_1 x_2 \vee q_1^{'} q_2 x_2^{'} \\
u &= q_1^{'} x_1 \vee q_1 x_1^{'} x_2^{'} \vee q_1 q_2^{'} x_1^{'}
\end{aligned}
$$

Ritande av nätet på grindnivå utelämnas här, men krävs för full poäng på tentamen.

Uppgift 4

(a) Vi börjar med att kontrollera $\gcd(1 \oplus D^3 \oplus D^4, 1 \oplus D \oplus D^4 \oplus D^5)$ för $s(D)$, och ser att denna är 1. Det betyder att vi kan använda Sats 7.7 för att hitta perioden på $C(D)$ genom att utföra divisionen $\frac{1}{C(D)}$ till dess att resten är D^T. I detta fallet får vi resten D^8, vilket betyder att sekvensen har perioden 8.
Vi utför nu lång division på $\frac{1 \oplus D^3 \oplus D^4}{1 \oplus D \oplus D^4 \oplus D^5}$ för att hitta de åtta första symbolerna som sekvensen genererar, vilket ger: $1 \oplus D \oplus D^2 \oplus D^7 \xrightarrow{D^{-1}} 11100001$.
Till slut får vi alltså att $s(D) = [11100001]^\infty$. Notera att det finns alternativa lösningssätt som också ger full poäng vid rättning.

(b) Från (a) vet vi att den kortaste LFSR som genererar $s(D)$ har längd 5 (eftersom $\deg C_s(D) = 5$ och $\gcd(P_s(D), C_s(D)) = 1$).
För sekvensen $x(D)$ är maximala längden på en LFSR som genererar sekvensen t', eftersom sekvensen har en maximal period på t'. Summan av sekvenserna kan skrivas på gemensamt bråkstreck enligt nedan:

$$
s(D) \oplus x(D) = \frac{P_s(D)}{C_s(D)} \oplus \frac{P_x(D)}{C_x(D)} = \frac{P_s(D) \cdot C_x(D) \oplus P_x(D) \cdot C_s(D)}{C_s(D) \cdot C_x(D)}
$$

Längden på LFSR:en är graden av polynomet $C_s(D) \cdot C_x(D)$ i nämnaren, vars maximala grad är $5 + t'$ eftersom $\deg C_s(D) = 5$ och $\deg C_x(D)$ är maximalt t'. Svar är alltså: $5 + t'$.

(c) De tio första bitarna kan hittas genom en vanlig lång division av $z(D)$. Resultatet blir:

$$
\frac{1 \oplus D \oplus D^3 \oplus D^5 \oplus D^9 \oplus D^{21}}{1 \oplus D \oplus D^{12} \oplus D^{17} \oplus D^{23}} = 1 \oplus D^3 \oplus D^4 \oplus D^9 \oplus \ldots \xrightarrow{D^{-1}} 1001100001 \ldots
$$

Uppgift 5

(a) Vi kallar insignalerna för SR-latchen x_1, x_2 och tillstånden/utsignalerna y_1, y_2. Karnaughdiagram för SR-latchen's tillståndsgraf ges av

y_1^+ (x_1x_2 \ y_1y_2)	00	01	11	10
00	-	0	-	1
01	-	0	0	1
11	-	-	-	-
10	-	1	1	1

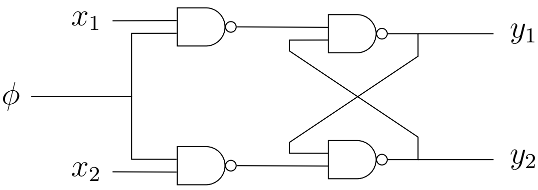
y_2^+ (x_1x_2 \ y_1y_2)	00	01	11	10
00	-	1	-	0
01	-	1	1	1
11	-	-	-	-
10	-	1	0	0

De Booleska uttrycken ges av

$$y_1^+ = x_1 \vee y_2' = (x_1' \wedge y_2)'$$
$$y_2^+ = x_2 \vee y_1' = (x_2' \wedge y_1)'$$

Eftersom tillståndsgrafen är asynkront realiserbar så kan återkopplingen realiseras utan D-element. Vidare så ska styrsignalen ϕ ska utnyttjas för att nollställa x_i. Detta kan realiseras genom att x_i ersätts av ($\phi \wedge x_i$). Det ger följande uttryck och realisering:

$$y_1 = ((\phi \wedge x_1)' \wedge y_2)'$$
$$y_2 = ((\phi \wedge x_2)' \wedge y_1)'$$



Notera att realiseringen även kan göras med AND, OR och inverterare.

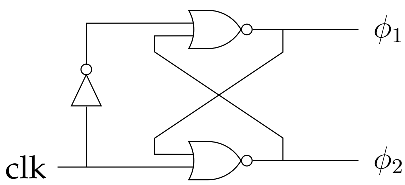
(b) Insignalen till styrkretsen är en klocksignal, clk, och tillstånd/utgångar ges av $\phi_1\phi_2$. Karnaughdiagrammen ges av

ϕ_1^+ (clk \ $\phi_1\phi_2$)	00	01	11	10
0	0	0	-	0
1	1	0	-	1

ϕ_2^+ (clk \ $\phi_1\phi_2$)	00	01	11	10
0	1	1	-	0
1	0	0	-	0

De Booleska uttrycken och realiseringen ges av

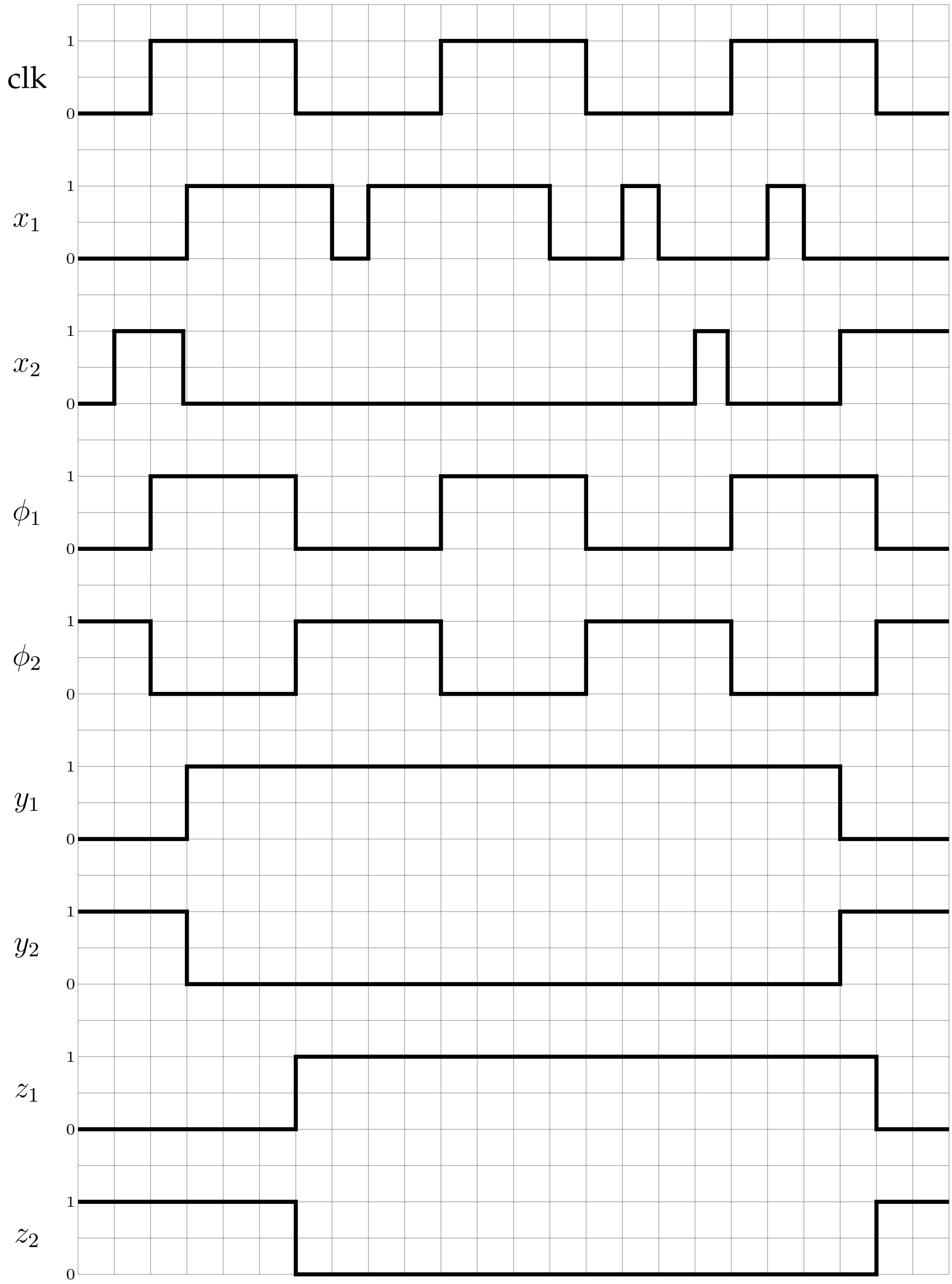
$$\phi_1^+ = clk \wedge \phi_2' = (clk' \vee \phi_2)'$$
$$\phi_2^+ = clk' \wedge \phi_1' = (clk \vee \phi_1)'$$



Även här kan realiseringen göras med AND-grindar och inverterare.

(c) Vippan är negativt flanktriggad. L_2 släpper igenom då $\phi_2 = 1$ och i tillståndsgrafen för styrsignalerna kan vi se att detta sker då $clk = 0$.

(d) Tillståndsgraferna kan direkt användas för att bestämma signalernas tidsdiagram. (Då vi inte vet starttillståndet för latchen så skulle det även vara korrekt att anta att denna är ′10′. Även antaganden om tidsfördröjning i kretsarna har renderat poäng.)


clk
x_1
x_2
ϕ_1
ϕ_2
y_1
y_2
z_1
z_2
1
0