Uppgift 1

(a) Vi får följande Karnaughdiagram eftersom vi har fem variabler.

$x_0 = 0$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	-	-	0
11	0	1	1	0
10	-	-	-	1

$x_0 = 1$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	1	-	-
11	1	0	0	0
10	1	0	0	1

Vi får följande nio primimplikatorer (namngivna A–I)

$$A = x_2'x_4' \qquad E = x_0x_3'x_4'$$
$$B = x_0'x_2x_4 \qquad F = x_0x_1'x_2$$
$$C = x_0'x_1x_4 \qquad G = x_0x_1'x_3$$
$$D = x_0'x_1x_2' \qquad H = x_0x_1'x_4'$$
$$I = x_1'x_2x_4$$

De väsentliga primimplikatorerna är A, E och G.

(b) Den minimala formen måste innehålla de väsentliga primimplikatorerna, och två ytterligare primimplikatorer för att täcka resterande ettor. Flera lösningar är möjliga. Ett exempel är:

$$\begin{aligned} f_{\text{MDF}}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= A \vee E \vee G \vee I \vee B \\ &= x_2'x_4' \vee x_0x_3'x_4' \vee x_0x_1'x_3 \vee x_1'x_2x_4 \vee x_0'x_2x_4 \end{aligned}$$

Uppgift 2

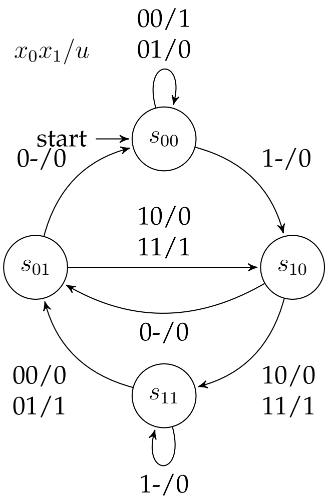
(a) Vi betecknar s_{ab} som ett tillstånd där a är insignalen x_0 vid $t-1$ och b är insignalen x_0 vid $t-2$. Tillståndet är alltså de två tidigare värdena på x_0. En tillståndstabell blir då:

	00	01	10	11
s_{00}	$s_{00}/1$	$s_{00}/0$	$s_{10}/0$	$s_{10}/0$
s_{01}	$s_{00}/0$	$s_{00}/0$	$s_{10}/0$	$s_{10}/1$
s_{10}	$s_{01}/0$	$s_{01}/0$	$s_{11}/0$	$s_{11}/1$
s_{11}	$s_{01}/0$	$s_{01}/1$	$s_{11}/0$	$s_{11}/0$

Detta ger oss fyra tillstånd, och eftersom vi högst kan ha fyra tidigare insignalkombinationer för $x_0(t-1)$ och $x_0(t-2)$ så kan man direkt se att det är ett minimalt antal tillstånd. Man kan också visa det med RF-algoritmen:

$$P1 : \{s_{00}\}, \{s_{01}, s_{10}\}, \{s_{11}\}$$
$$P2 : \{s_{00}\}, \{s_{01}\}, \{s_{10}\}, \{s_{11}\}$$
$$P3 : \{s_{00}\}, \{s_{01}\}, \{s_{10}\}, \{s_{11}\} = P2$$

Alltså var vår tidigare tabell minimal, och vi kan rita upp tillståndsgrafen:



(b) Tillståndskodning väljs som q_0q_1 från tillstånden $s_{q_0q_1}$, till exempel kommer tillståndet s_{10} kodas som $q_0q_1 = 10$. Vi får då följande Karnaughdiagram för q_0^+, q_1^+ och y.

q_0^+ (q_0q_1 \ x_0x_1)	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

q_1^+ (q_0q_1 \ x_0x_1)	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

y (q_0q_1 \ x_0x_1)	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	0	0
10	0	0	1	0

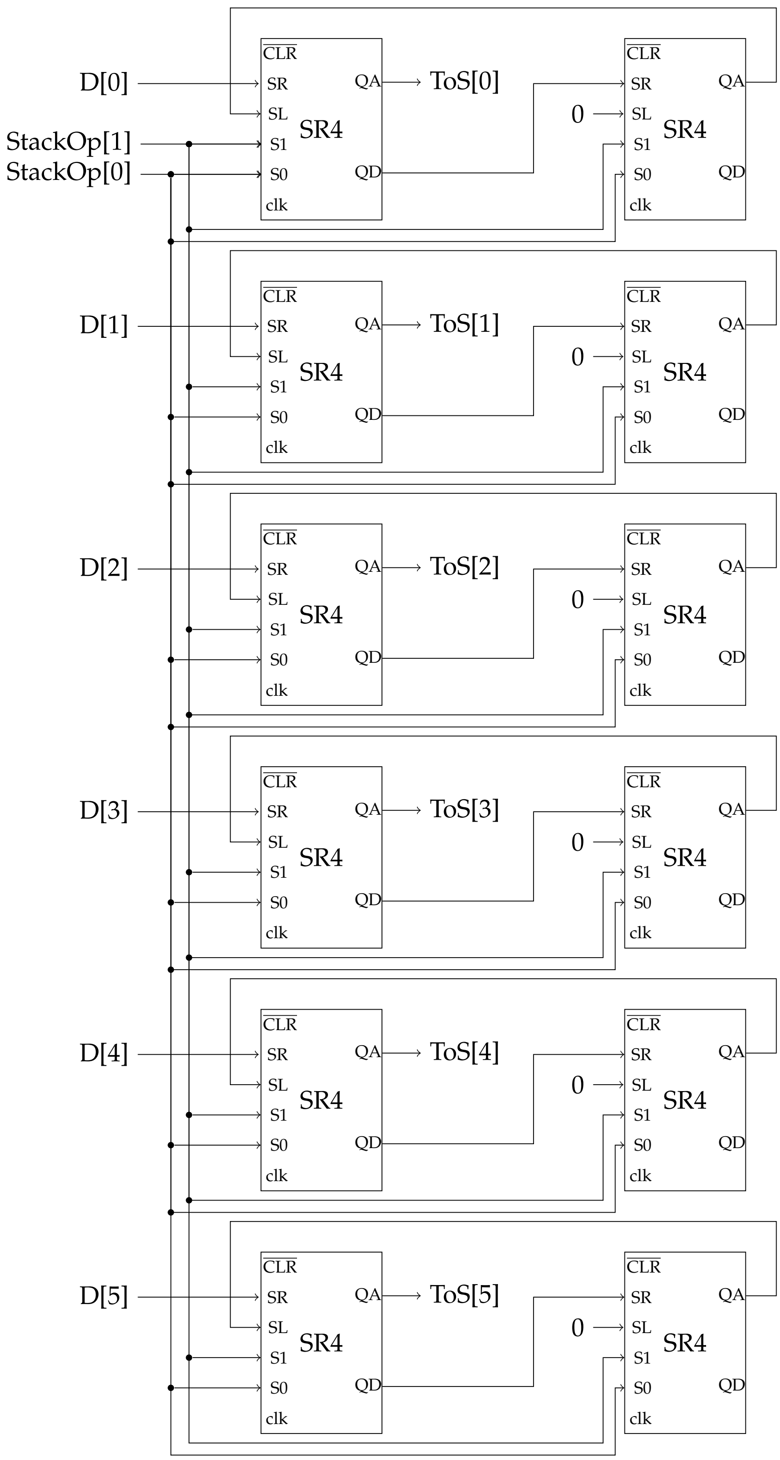
Detta ger följande minimala uttryck:

$$q_0^+ = x_0$$
$$q_1^+ = q_0$$
$$u = q_0'q_1'x_0'x_1' \vee q_0'q_1x_0x_1 \vee q_0q_1x_0'x_1 \vee q_0q_1'x_0x_1$$

Realiseringen utelämnas här, men krävs för full poäng på tentamen.

Uppgift 3

För att konstruera en stack med djupet 8 kan vi utnyttja två stycken seriekopplade skiftregister SR4. Vi behöver dessutom sex stycken sådana par för att kunna hantera sex bitar. Skiftregistren kopplas så att PUSH är ett högerskift, och POP är ett vänsterskift. Vid både höger- och vänsterskift ska bitarna kunna förflyttas mellan de seriekopplade skiftregistren, därför måste SR/SL kopplas ihop med QA/QD på ett lämpligt sätt. Se koppling nedan.



Utöver strecken ovan ska även klockan clk kopplas till samtliga skiftregister SR4, och n_rst till alla $\overline{\text{CLR}}$.

Uppgift 4

(a) Skriv om var och en av funktionerna på RMF-form

$$
\begin{aligned}
f_1 &= x_1x_2' \vee x_1'x_2 = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus (x_1 \oplus 1)x_2 = x_1 \oplus x_2,\\
f_2 &= x_2 \wedge (x_1 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3,\\
f_3 &= x_2 \vee x_3 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_2x_3,\\
f_4 &= x_1 \wedge (x_2 \vee x_1x_2x_3') = x_1x_2 \vee x_1x_2x_3' = x_1x_2.
\end{aligned}
$$

Vi ser att enbart f_1 är en linjär funktion.

(b) Kretsen kan på matrisform beskrivas enligt följande

$$
\begin{pmatrix} q_1^+ \\ q_2^+ \\ q_3^+ \\ q_4^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x,
$$

$$
u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}.
$$

K-matrisen till detta system kan fås som

$$
K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

T-matrisen utgörs av de första 2 linjärt oberoende raderna i K, det vill säga

$$
T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

En högerinvers till denna matris är

$$
R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

En ekvivalent och reducerad krets har följande matriser

$$
\begin{aligned}
A_{red} &= TAR = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\\
B_{red} &= TB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\\
C_{red} &= CR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

En ritad realisering av den reducerade kretsen ser ut så här

$$
x \longrightarrow \boxed{q_2} \longrightarrow \boxed{q_1} \longrightarrow u
$$

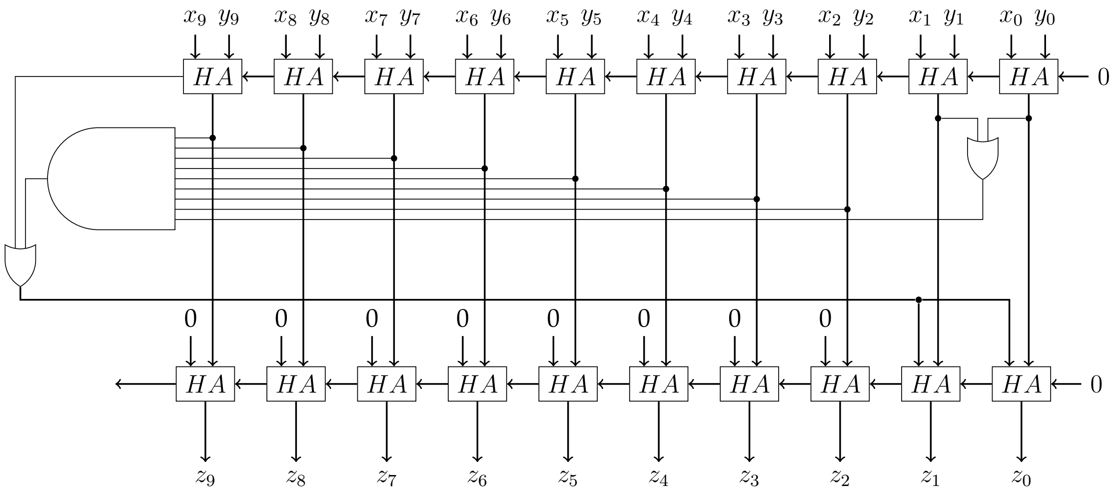
(c) Genom att kolla på ritningen av den reducerade kretsen ovan ser vi att utsignalen u är fördröjd två steg i förhållande till insignalen x. Alltså får vi direkt att $G(D) = D^2$. Alternativt kan vi beräkna G enligt formler som

$$G(D) = C(I \oplus AD)^{-1}BD \oplus H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} D =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 1 \end{pmatrix} D = D^2.$$

Uppgift 5

(a) Som insignaler har vi talen $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ i $\mathbb{Z}_{1021}$. Med hjälp av vanliga heladderare adderar vi talen, fast i $\mathbb{Z}_{1024}$! Om resultatet är ≥ 1021 har vi fått overflow, detta sker antingen då resultatet är ≥ 1024, med andra ord när största carrybiten är 1. Eller då resultatet ligger mellan 1021 och 1023. Detta sker då de åtta mest signifikanta bitarna är 1, samt då minst en av de två minst signifikanta bitarna är 1.
Vid overflow ska 1021 subtraheras från resultatet. I $\mathbb{Z}_{1024}$ är detta ekvivalent med att addera 3.
Dessa beskrivna steg illustreras i figuren nedan.



(b) Börja med att skriva om ekvationen enligt följande

$$5x^2 - 11x - 1 = 1020 \Leftrightarrow x(5x - 11) = 0.$$

Lösningar till ekvationen fås antingen då $x = 0$ eller då $5x - 11 = 0$[1]. Genom att använda Euklides algoritm baklänges finner vi att $5^{-1} = -204$ i $\mathbb{Z}_{1021}$. Således är även $x = 5^{-1} \cdot 11 = -204 \cdot 11 = -2244 = 819$ i $\mathbb{Z}_{1021}$ en lösning till ekvationen.

[1]Eftersom 1021 är ett primtal är $\mathbb{Z}_{1021}$ nolldelarfri. Med andra ord gäller att om $ab = 0$ i $\mathbb{Z}_{1021}$ så är antingen $a = 0$ eller $b = 0$.