LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för Elektro- och Informationsteknik

Tentamen 2020-06-05
SIGNALBEHANDLING i MULTIMEDIA, EITA50
Tid: 08.00-13.00

Hjälpmedel: Miniräknare och en valfri formelsamling i signalbehandling eller matematik.
Allowed items: calculator, DSP and mathematical tables of formulas

Viktigt: För att underlätta rättningen: *In order to simplify the grading:*
Lös endast **en** uppgift per sida. *Only solve* **one** *problem per page.*
Lämna endast in en fil, i formatet PDF. *Upload a single file, in the format PDF.*
Påståenden ska motiveras via resonemang och/eller ekvationer.
Statements must be motivated by reasoning and/or equations.
Alla beräkningar måste redovisas komplett och steg för steg.
All calculations must be shown completely and step by step.
Tentamen slutar13:00 och måste vara inscannad och uppladdad 13:15.
The test ends at 13:00 and must be scanned and uploaded by 13:15.

1. Givet en insignal x(n) och ett impulssvar h(n)
Given an input signal x(n) and an impulse response h(n)

$$x(n) = [\underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2],$$

$$h(n) = [\underset{\uparrow}{2} \quad 3 \quad 3 \quad 2],$$

a) Bestäm systemets differensekvation. (0.1p)
Determine the system's difference equation.

b) Bestäm systemfunktionen $H(z)$. (0.1p)
Determine the system function, $H(z)$.

c) Har systemet linjär fas? (0.1p)
Does the system have linear phase?

d) Beräkna utsignalen, när insignalen är $x(n)$. (0.1p)
Calculate the output signal, when the input signal is $x(n)$.

e) Beräkna den cirkulära faltningen mellan x och h, modulo 4. (0.1p)
Calculate the circular convolution between x and h, modulo 4.

2. a) Professor Larsson sitter i ett flygplan på Kastrup och studerar starten av vänster motors propeller genom kameran på sin mobiltelefon. Kameran samplar med 50 Hz. Piloten startar motorn, som har fem likadana propellerblad, och varvar sakta upp den från noll till 3 000 varv per minut. Förklara hur propellerns rörelser ser ut i mobilkameran under uppstarten. (0.3p)

   a) Professor Larsson sits in an airplane at Copenhagen Airport and observes the start of the left engine propeller through his mobile phone camera. The camera samples with 50 Hz. The pilot starts the motor, which has five similar propeller blades, and slowly increases the speed from 0 to 3 000 rotations per minute. Explain how the propeller's movements look through the mobile camera during the start.

   b) Eulers identitet eller Eulers ekvation anses vara den vackraste av alla matematiska formler, eftersom den innehåller de tre talen e, j och π. Den ser ut så här:

   b) Euler's identity is considered to be the most beautiful of all mathematical equations, because it contains the three numbers, e, j, and π. It looks like this:

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

   Bevisa Eulers identitet genom att utgå från Eulers formler för *cos* och *sin*. (0.2p)

   Prove Euler's Identity by starting from Euler's formulas for cos och sin.

3. Följande differensekvation är given

   The following difference equation is given

$$y(n) - y(n-1) + \frac{24}{100}y(n-2) = x(n)$$

   a) Bestäm Z-transformen $H(z)$. (0.2p)

   a) Determine the Z-transform $H(z)$.

   b) Beräkna impulssvaret $h(n)$. (0.2p)

   b) Determine the Z-transform $h(n)$.

   Följande insignal är given:

   The following input signal is given

$$x(n) = 3(\frac{1}{2})^n u(n)$$

   c) Bestäm utsignalen. (0.6p)

   c) Determine the output signal.

4. Följande differensekvation är given
   The following difference equation is given

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

a) Bestäm Z-transformen $H(z)$. (0.2p)
a) Determine the Z-transform $H(z)$.

b) Beräkna impulssvaret $h(n)$. (0.2p)
b) Determine the Z-transform $h(n)$.

Följande insignal är given:
The following input signal is given

$$x(n) = sin(2\pi\frac{1}{4}n) \quad -\infty < n < +\infty$$

c) Bestäm utsignalen. (0.6p)
c) Determine the output signal.

5. Följande tidsdiskreta signal är given
   The following time-discrete signal is given

$$x(n) = cos(2\pi\frac{1}{10}n) + cos(2\pi\frac{3}{10}n)$$

a) Signalen interpoleras med en faktor $I = 2$. Vad blir frekvensinnehållet i den nya signalen? Förklara och motivera! (0.4p)
a) The signal is interpolated with a factor $I = 2$. What is the frequency content in the new signal? Explain and motivate!

b) Signalen decimeras med en faktor $D = 2$. Vad blir frekvensinnehållet i den nya signalen? Förklara och motivera! (0.4p)
b) The signal is decimated with a factor $D = 2$. What is the frequency content in the new signal? Explain and motivate!

c) Kan interpolering leda till aliasing? Kan decimerning leda till aliasing? (0.2p)
c) Can interpolation lead to aliasing? Can decimation lead to aliasing?

6. Vi vill modellera spridning av en smittsam virusinfektion i en tidig fas då spridningen är exponentiell. Gör följande antaganden:
We want to model the spread of a contagious virus infection in an early phase when the transmission is exponential. Assume the following:

   a Smittan förs vidare från individ till individ i diskreta steg, $n = 0, 1, 2, 3, ...$
   The infection is transmitted from person to person in discrete steps, $n = 0, 1, 2, 3, ...$

   b Stegen sker samtidigt för alla individer.
   The steps occur at the same time for all individuals.

   c Varje smittad individ smittar i genomsnitt r nya individer i varje steg, där faktorn r är det så kallade reproduktionstalet.
   Each infected individual infects r new individuals in each step, where the factor r is the so-called reproduction rate.

   d Vi bortser från att individer tillfrisknar eller avlider.
   We do not consider individuals getting well or dying.

   e Modellen ska vara kausal, det vill säga, det finns inga smittade för $n < 0$.
   The model should be causal, that is, there are no infected individuals for $n < 0$.

   f Spridningen börjar i steg noll med att N stycken individer är smittade.
   The transmission starts in step zero, with N infected individuals.

   g Modellen ska i övrigt vara så enkel som möjligt.
   Otherwise, the model should be as simple as possible.

a) Skriv ner en differensekvation för smittspridningen där insignalen $x(n)$ anger hur många smittade individer som kommer till populationen utifrån, r är reproduktionstalet, och $y(n)$ är antalet smittade individer i varje steg. Ledning: du bör känna igen ekvationen från kursen. (0.5p)
a) Write down a difference equation for the virus tramsmission, where the input signal $x(n)$ shows how many infected individuals are added to the population from outside in each step, r is the reproduction rate, and $y(n)$ is the number of infected individuals at each step. Hint: you should recognize the equation from the course.

Antag att insignalen är:
Assume that the input signal is

$$x(n) = 30\delta(n)$$

b) Lös differensekvationen och beräkna utsignalen för den givna insignalen. (0.2p)
b) Solve the difference equation and determine the output signal for the given input signal.

c) Vilken ordning har differensekvationen? (0.1p)
c) Of what order is the equation?

d) För vilka värden på r ökar spridningen exponentiellt? (0.1p)
d) For which r values does the transmission increase exponentially?

e) För vilka värden på r är lösningen till ekvationen instabil? (0.1p)
e) For which r values is the solution of the equation unstable?

Lycka Till! *Good Luck!*

Lösningar 2020-06-05

Lösning 1 a) Differensekvationen är *The difference equation is*

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) => y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + 3x(n-2) + 2x(n-3)$$

b) Definitionen av Z-transfomen ger *The definition of the Z transform gives*

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = 2 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}$$

c) Systemet har linjär fas eftersom koefficienterna i h är symmetriska. *The system has linear phase since the coefficients in h are symmetric.*

d) Utsignalen ges av linjär faltning *The output signal is given by linear convolution*

$$y(n) \quad = \quad h(n) * x(n) = [\ \underset{\uparrow}{2} \quad 7 \quad 11 \quad 15 \quad 15 \quad 15 \quad 13 \quad 8 \quad 4\ ]\,.$$

e) Den cirkulära faltningen modulo 4 är *The circular convolution modulo 4 is*

$$h(n) * x(n) = [\ \underset{\uparrow}{15} \quad 15 \quad 15 \quad 15\ ]\,.$$

Lösning 2 a) Först börjar propellern i kameran att snurra i den verkliga riktningen. Farten ökar och minskar sedan igen och propellern ser ut att stanna när den verkliga propellern når 10 Hz. Sedan börjar propellern i kameran att snurra åt motsatt håll. Farten ökar och minskar och propellern stannar igen när den verkliga propellern når 20 Hz. Propellern i kameran ser ut att snurra åt rätt håll mellan 20 och 30 Hz, åt fel håll mellan 30 och 40 Hz, och åt rätt håll mellan 40 och 50 Hz, och när den når 50 Hz ser den åter ut att stå stilla. Baserat på en sann historia.

a) First the propeller in the camera starts turning in the real direction. The speed increases and then decreases, and the propeller in the camera seems to stop when the real propeller reaches 10 Hz. Then the propeller in the camera seems to start turning in the opposite direction. The speed increases and then decreases, and the propeller seems to stop again when the real propeller reaches 20 Hz. The propeller in the camera rotates in the correct direction between 20 and 30 Hz, in the opposite direction between 30 and 40 Hz, and in the correct direction between 40 and 50 Hz. It seems to stand still again when the real propeller reaches 50 Hz. Based on a true story.

b) Eulers formler är *b) Euler's formulas are*

$$cos(\omega) = \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

$$sin(\omega) = \frac{1}{2j}e^{j\omega} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega}$$

Addera de två formlerna *Add the two formulas*

$$cos(\omega) + jsin(\omega) = e^{j\omega}$$

Sätt in $\omega = \pi$. *Set $\omega = \pi$.*

$$e^{j\pi} = cos(\pi) + jsin(\pi)$$

$$e^{j\pi} = -1 + 0$$

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

Lösning 3 Z-transformering ger
Z-transformation gives

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + \frac{24}{100}z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{24}{100}z^{-2}}X(z)$$

a) $H(z)$ är
a) $H(z)$ is

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{24}{100}z^{-2}}$$

Inverstransformering av $H(Z)$ ger impulssvaret $h(n)$. Bestäm först polerna:
The inverse transform of $H(z)$ gives the impulse response $h(n)$. First find the poles:

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2}\frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{24}{100}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - z^1 + \frac{24}{100}}$$

$$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{100} - \frac{24}{100}} => \quad p_1 = \frac{4}{10}, \quad p_2 = \frac{6}{10}$$

Systemfunktionen är
The system function is

$$H(z) = \frac{A}{1 - \frac{4}{10}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{6}{10}z^{-1}}$$

Handpåläggningsmetoden ger $A = -2$ och $B = 3$.
Identification gives $A = -2$ and $B = 3$.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{24}{100}z^{-2}} && (1) \\ &= \frac{3}{1 - \frac{6}{10}z^{-1}} - \frac{2}{1 - \frac{4}{10}z^{-1}} && (2) \end{aligned}$$

b) Impulssvaret är
b) The impulse response is

$$h(n) = \left(3(\frac{6}{10})^n - 2(\frac{4}{10})^n\right) u(n)$$

Polerna är $p_1 = \frac{4}{10}$ och $p_2 = \frac{6}{10}$. Systemet är stabilt eftersom polerna ligger innanför enhetscirkeln.
The poles are $p_1 = \frac{4}{10}$ and $p_2 = \frac{6}{10}$. The system is stable because the poles are located inside the unit circle.

c) Insättning av insignalens transform ger
c) Using the transform of the input signal gives

$$Y(z) = \frac{3}{(1 - \frac{4}{10}z^{-1})(1 - \frac{5}{10}z^{-1})(1 - \frac{6}{10}z^{-1})}$$

Partialbråksuppdelning ger
Partial fractions give

$$Y(z) = \frac{24}{(1 - \frac{4}{10}z^{-1})} - \frac{75}{(1 - \frac{5}{10}z^{-1})} + \frac{54}{(1 - \frac{6}{10}z^{-1})}$$

Inverstransformering ger
Inverse transformation gives

$$y(n) = 24(\frac{4}{10})^n u(n) - 75(\frac{5}{10})^n u(n) + 54(\frac{6}{10})^n u(n)$$

Lösning 4 a) Z-transformen fås genom tabell
a) The Z-transform is found via tables

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

b) Impulssvaret får genom inverstransformering
b) The impulse response is given by the inverse transform

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

Insignalen är
The input signal is

$$x(n) = sin(2\pi\frac{1}{4}n) = sin(\omega_0 n) \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

Utsignalen ges av
The output signal is given by

$$y(n) = |H(\omega_o)| sin(\omega_0 n + \angle H(\omega_0))$$

$$H(\omega_0) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega_0}}$$

Sätt in $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.
Set $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = cos(-\frac{\pi}{2}) + jsin(-\frac{\pi}{2}) = -j$$

$$H(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{1 + \frac{j}{2}} = \frac{2}{5}(2 - j) = \frac{4}{5} - j\frac{2}{5}$$

$$|H(\omega_0)| = \frac{\sqrt{20}}{5} = 0.8944 \quad \angle H(\omega_0) = -arctan(\frac{1}{2}) = -0.4636$$

c) Utsignalen blir
c) The output signal is

$$y(n) = \frac{\sqrt{20}}{5} sin(\omega_0 n - arctan(\frac{1}{2}))$$

Lösning 5 a) Interpolering leder till en halvering av frekvenserna. Frekvensen 0.1 ger en ny frekvens 0.05 och frekvensen 0.3 ger en ny frekvens på 0.15. Men frekvensen 0.1 har även en aliasfrekvens 0.9 som leder till den nya frekvensen 0.45. Frekvensen 0.3 har en aliasfrekvens 0.7 som leder till den nya frekvensen 0.35. Resultatet blir
a) Interpolation means that the new frequncies have half the value. The frequency 0.1 gives

a new frequency of 0.05 and the frequency 0.3 gives a new frequency of 0.15. However, the frequency 0.1 also has an alias frequency of 0.9, which gives a new frequency of 0.45. The frequency 0.3 has an alias frequency of 0.7, which gives a new frequency of 0.35. The result is

$$x(n) = cos(2\pi \frac{1}{20} n) + cos(2\pi \frac{3}{20} n) + cos(2\pi \frac{7}{20} n) + cos(2\pi \frac{9}{20} n)$$

b) Decimering leder till en dubblering av frekvenserna. Frekvensen 0.1 ger en ny frekvens 0.2 och frekvensen 0.3 ger en ny frekvens på 0.6, vilket är en aliasfrekvens för 0.4. Resultatet blir
b) Decimation means a doubling of frequencies. The frequency 0.1 gives a new frequency of 0.2 and the frequency 0.3 gives a new frequency of 0.6, which is an alias for 0.4. The result is

$$x(n) = cos(2\pi \frac{2}{10} n) + cos(2\pi \frac{4}{10} n)$$

c) Både interpolering och decimering kan leda till aliasing, enligt exemplen ovan.
Both interpolation and decimation can lead to aliasing, as can be seen above.

Lösning 6 a) Differensekvationen blir
a) The difference equation is

$$y(n) - ry(n-1) = x(n)$$

Vi känner igen ett första ordningens linjärt och tidsinvariant system.
We recognize a first-order, linear, time-invariant system.

b) För att beräkna utsignalen Z-transformerar vi och sätter in $x(n)$.
b) To calculate the output signal, we Z-transform and use $x(n)$.

$$Y(z) = \frac{1}{1 - rz^{-1}} X(z) = \frac{30}{1 - rz^{-1}}$$

Inverstransformering ger lösningen
Inverse transformation gives the solution

$$y(n) = 30 r^n u(n)$$

c) Differensekvationen är av första ordningen.
c) The difference equation is of first order.

d) Spridningen ökar exponentiellt när $r > 1$ vilket är samma sak som att lösningen är instabil.
d) The transmission increases exponentially when $r > 1$, which is the same condition as for when the solution is unstable.