LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för Elektro- och Informationsteknik

Tentamen 2019-10-24
SIGNALBEHANDLING i MULTIMEDIA, EITA50
Time: 14.00-19.00
Room: Old Main Building 235

Hjälpmedel: Miniräknare och en valfri formelsamling i signalbehandling eller matematik.
Allowed items: calculator, DSP and mathematical tables of formulas

Viktigt: För att underlätta rättningen: *In order to simplify the correction:*
Lös endast **en** uppgift per blad. *Only solve* **one** *problem per paper sheet.*
Skriv ditt namn på **samtliga** blad. *Write your name on* **every** *paper sheet.*
Påståenden ska motiveras via resonemang och/eller ekvationer.
Statements must be motivated by reasoning and/or equations.
Poängen från inlämningsuppgifterna adderas till tentamensresultatet.
The points from the assignments will be added to the examination score.
Max total poäng (tentamen + båda inl.uppg) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0
Max total score (exam + 2 assignments) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0
Betygsgränser: 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).
Grading: 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).

1. Ett LTI-system beskrivs av följande tidsdiskreta impulssvar
An LTI system is described by the following time-discrete impulse response

$$h(n) = [\underset{\uparrow}{1} \quad 3 \quad 5 \quad 3 \quad 1]$$

a) Bestäm systemets differensekvation och systemfunktion $H(z)$. (0.1p)
Determine the system's difference equation and system function, $H(z)$.

b) Bestäm Fouriertransformen, $H(\omega)$, och DFT, $H(k)$, med $N = 8$. (0.1p)
Determine the Fourier transform, $H(\omega)$, and DFT, $H(k)$, with $N = 8$.

c) Har systemet linjär eller icke-linjär fas? Förklara! (0.1p)
Is this a linear or non-linear phase system? Explain!

d) Bestäm den linjära autokorrelationen, $r_{hh}(n)$. (0.1p)
Determine the linear auto-correlation function, $r_{hh}(n)$.

e) Bestäm utsignalen, när insignalen är given av (0.1p)
Determine the output signal, when the input signal is given by

$$x(n) = [\underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 1 \quad 2]$$

2. Följande tidsdiskreta signal är given

   The following time-discrete signal is given

$$x(n) = cos(2\pi \frac{4}{10} n)$$

   Signalen interpoleras med en faktor $I = 2$. Vad blir frekvensinnehållet i den nya signalen? Förklara och motivera! (0.2p)

   The signal is interpolated with a factor $I = 2$. What is the frequency content in the new signal? Explain and motivate!

   Följande tidsdiskreta signal är given

   The following time-discrete signal is given

$$x(n) = cos(2\pi \frac{1}{15} n)$$

   Vilken är den största faktor D man kan decimera signalen med utan att det uppstår aliasingeffekter? Förklara! (0.2p)

   Which is the largest factor D with which you decimate the signal without causing aliasing effects? Explain!

   Följande kontinuerliga signal är given

   The following continuous signal is given

$$x(t) = cos(\omega t)$$

   Bestäm derivatan $\frac{d}{dt}x(t)$ med användning av Eulers formler! (0.1p)

   Determine the derivative $\frac{d}{dt}x(t)$ using Euler's formulae!

3. Följande differensekvation är given

   The following difference equation is given

$$y(n) - y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

   Bestäm impulssvaret. Är systemet stabilt? Beskriv impulssvaret. Förklara! (1.0)

   Determine the impulse response. Is the system stable? Describe the impulse response. Explain!

4. Ett linjärt, tidsinvariant system beskrivs med differensekvationen
A linear, time-invariant system is described by the difference equation

$$y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16}y(n-2) = x(n)$$

Bestäm utsignalen då
Determine the output signal when

$$x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) + sin(2\pi\frac{1}{4}n), \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

(1.0p)

5. Vad kallas metoden som kan användas för att dela upp en lång eller oändlig insignal i kortare block av längden L, filtrera varje block separat med ett filter $h(n)$, och sedan rekonstruera den kompletta utsignalen? (0.1p)
What is the method called that can be used to separate a long or infinite signal into short blocks of length L, filter each block separately with a filter $h(n)$ and then reconstruct the complete output signal?

En insignal ges av
An input signal is given by

$$x(n) = \{\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\ \}$$

Ett filter ges av
A filter is given by

$$h(n) = \{\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1\ \}$$

Dela upp insignalen i block av längden fyra. Vad är den maximala längden av de resulterande utsignalsblocken om man filtrerar med det givna filtret? (0.2p)
Partition the input signal in blocks of length four. What is the maximal length of the resulting output blocks when using the filter given above?

Använd metoden för att blockfiltrera insignalen (med blocklängd 4) och rekonstruera utsignalen $y(n) = x(n) * h(n)$. (0.7p)
Use the method to block filter the input (with block length 4) and reconstruct the output $y(n) = x(n) * h(n)$.

6. Att tidsfördröja en signal ett visst antal steg motsvaras av att multiplicera Z-transformen med z^{-k}. Bevisa att om $y(n) = x(n-k)$ så är $Y(z) = z^{-k}X(z)$. (1.0p)
Time delaying a signal a certain number of steps corresponds to multiplying the Z transform with z^{-k}. Show that if $y(n) = x(n-k)$, then $Y(z) = z^{-k}X(z)$.

Lycka till! *Good luck!*

LÖSNINGAR EITA50, 2019-10-

Lösning 1 a) Differensekvationen är *The difference equation is*

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) => y(n) = x(n)+3x(n-1)+5x(n-2)+3x(n-3)+x(n-4)$$

Definitionen av Z-transfomen ger *The definition of the Z transform gives*

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4}$$

b) Fouriertransformen är *The Fourier transform is*

$$H(w) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = 1 + 3e^{-j\omega} + 5e^{-2j\omega} + 3e^{-3j\omega} + e^{-4j\omega}$$

DFT med $N = 8$ är *The DFT with $N = 8$ is*

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j2\pi kn/N} = 1 + 3e^{-2j\pi k/8} + 5e^{-4j\pi k/8} + 3e^{-6j\pi k/8} + e^{-8j\pi k/8}$$

c) Impulssvarets koefficienter är symmetriska, vilket betyder att systemet har linjär fas. *The coefficients of the impulse response are symmetric, which means that the system has linear phase.*

d) Den linjära autokorrolationen är *The linear auto correlation is*

$$r_{hh}(n) = h(n) * h(-n) = [\underset{\uparrow}{1} \quad 6 \quad 19 \quad 36 \quad 45 \quad 36 \quad 19 \quad 6 \quad 1\,]$$

e) Utsignalen beräknas genom faltning *The output signal is calculated by convolution*

$$y(n) = h(n) * x(n) = [\underset{\uparrow}{1} \quad 5 \quad 12 \quad 18 \quad 18 \quad 15 \quad 7 \quad 2\,]$$

Lösning 2 Interpolation innebär att frekvensspektrum trycks ihop med en faktor $I = 2$. Det ursprungliga spektrat innehåller en signal med frekvensen 0.4, vilken blir $0.4/2 = 0.2$. Men eftersom spektrum för en diskret signal är periodiskt, innehåller det även en signal med frekvensen $-0.4 + 1 = 0.6$. Denna ger upphov till en signal med frekvensen $0.6/2 = 0.3$. Spektrum för den interpolerade signalen innehåller alltså två frekvenser, 0.2 och 0.3.

Interpolation means that the frequency spectrum is compressed by a factor $I = 2$. The original spectrum contains a signal with the frequency 0.4, which gives $0.4/2 = 0.2$. But since the spectrum of a discrete signal is periodic, it also contains a signal with the frequency $-0.4 + 1 = 0.6$. This gives a new frequency of $0.6/2 = 0.3$. Thus, the spectrum of the interpolated signal contains two frequencies, 0.2 and 0.3.

Decimering innebär att frekvensspektrum dras isär med en faktor D. Aliasing uppträder om frekvensen $\frac{1}{15}$ når gränsen på det fundamentala intervallet, 0.5, alltså om $D\frac{1}{15} \geq 0.5$. Eftersom faktorn D är ett heltal, får den inte blir större än 7.

Decimation means that the frequency interval is widened by a factor D. Aliasing occurs if the frequency $\frac{1}{15}$ reaches the border of the fundamental interval, 0.5, that is, if $D\frac{1}{15} \geq 0.5$. Since D is an integer, it cannot be larger than 7.

Skriv om $sin(\omega t)$ med Eulers ekvation, derivera, och identifiera $cos(\omega t)$.
Rewrite $sin(\omega t)$ with Euler's equation, derive, and identify $cos(\omega t)$.

$$\frac{d}{dt}sin(\omega t) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{d}{dt}\frac{1}{2j}e^{-j\omega t}$$

$$= \frac{j\omega}{2j}e^{j\omega t} - \frac{-j\omega}{2j}e^{-j\omega t} = \frac{\omega}{2}e^{j\omega t} + \frac{\omega}{2}e^{-j\omega t} = \omega(\frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}) = \omega cos(\omega t)$$

Lösning 3 Differensekvationen är *The difference equation is*

$$y(n) - y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

Transformera *Transform*

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + \frac{1}{2}z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

Impulssvarets transform är *The transform of the impulse response is*

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Poler *Poles*

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$$

Partialbråksuppdelning *Partial fractions*

$$\frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{A_1}{(z-p_1)} + \frac{A_2}{(z-p_2)}$$

$$A_1 = \frac{p_1+1}{(p_1-p_2)} = \frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2}$$

$$A_2 = \frac{p_2+1}{(p_2-p_1)} = \frac{\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + j\frac{3}{2} = A_1^*$$

Inverstransformering *Inverse transform*

$$h(n) = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n)u(n) = (A_1 p_1^n + A_1^*(p_1^*)^n)u(n)$$

I allmänhet kan lösningen skrivas som *In general, the solution can be written as*

$$= |A_1| r_1^n (e^{j(\beta_1 n + \alpha_1)} + e^{-j(\beta_1 n + \alpha_1)})u(n) = 2|A_1| r_1^n cos(\beta_1 n + \alpha_1)u(n)$$

Skriv om på polär form *Rewrite on polar form*

$$A_1 = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{-71.565j}$$

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}j}$$

Lösningen blir *The solution is*

$$h(n) = \sqrt{10}(-\frac{1}{\sqrt{2}})^n cos(\frac{\pi}{4}n - 71.565)u(n)$$

De komplexkonjugerade polerna ligger innanför enhetscirkeln. Systemet är stabilt men impulssvaret innehåller en svängning.
The complex conjugated poles are inside the unit circle. The system is stable but the impulse response contains an oscillation.

Lösning 4 Z-transformera differensekvationen *Z transform the difference equiation*

$$
\begin{aligned}
y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16}\, y(n-2) &= x(n) \\
Y(z)\left(1 - z^{-1} + \frac{3}{16}\, z^{-2}\right) &= X(z) \\
Y(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{3}{16}\, z^{-2}}\, X(z)
\end{aligned}
$$

Poler *Poles*

$$
p_{1,2} = \begin{cases} 1/4 \\ 3/4 \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\, z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\, z^{-1}\right)}\, X(z)
$$

Låt *Let*

$$
x(n) = x_1(n) + x_2(n)
$$

där *where*

$$
\begin{aligned}
x_1(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \\
x_2(n) &= \sin\left(2\pi \frac{1}{4}\, n\right)
\end{aligned}
$$

$$
X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\, z^{-1}} \Rightarrow Y_1(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}\, z^{-1}} + \frac{\frac{9}{2}}{1 - \frac{3}{4}\, z^{-1}} - \frac{4}{1 - \frac{1}{2}\, z^{-1}}
$$

Systemets förstärkning och fasförskjutning vid frekvensen f=$\frac{1}{4}$ ges av
The system's gain and phase change at the frequency f=$\frac{1}{4}$ is given by

$$
H\left(w = 2\pi \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1 - e^{-j2\pi\frac{1}{4}} + \frac{3}{16}\, e^{-j2\frac{\pi}{4}\;2}} = \frac{1}{\frac{13}{16} + j} = 0.776 e^{-j0.888}
$$

Inverstransformering ger
Inverse transformation gives

$$
\Rightarrow y(n) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u(n) + 0.776 \sin\left(2\pi \frac{1}{4}\, n - 0.888\right)
$$

Lösning 5 Metoden heter overlap-and-add.
The method is called overlap-and-add.

Insignalen delas upp i block av längden $L = 4$. Filtret har längden $M = 4$. Den maximala längden av ett resulterande block är $N = L + M - 1 = 7$.
The input signal is partitioned into blocks of length $L = 4$. The filter has the length $M = 4$. The maximal length of a resulting block is $N = L + M - 1 = 7$.

Insignalen delas upp i tre block, som vart och ett faltas med filtret. Utsignalen ges av addition av resultaten av de enskilda faltningarna.
The input signal is partitioned into three blocks, and each of these are convoluted with the filter. The output signal is given by addition of the results of each convolution.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
x_1 * h & = & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & & & & & & & & \\
x_2 * h & = & & & & & 2 & 5 & 8 & 9 & 7 & 4 & 1 & & & & \\
x_3 * h & = & & & & & & & & & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\
\\
x * h & = & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 7 & 5 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

Lösning 6 Använd definitionen av Z-transformen. Sätt in $x(n-k)$, multiplicera med $z^{-k}z^{+k}(=1)$, bryt ut z^{-k}, byt variabel $m = n - k$ och identifiera Z-transformen av $X(z)$.
Use the definition of the Z transform. Put in $x(n-k)$ and multiply with $z^{-k}z^{+k}(=1)$, break out z^{-k}, substitute the variable $m = n - 1$ and identify the Z transform of $X(z)$.

$$
\begin{aligned}
y(n) = x(n-k) \quad \Leftrightarrow \quad Y(z) &= \sum_n y(n) z^{-n} \\
&= \sum_n x(n-k) z^{-n} \\
&= \sum_n x(n-k) z^{-n} z^{-k} z^{+k} \\
&= z^{-k} \sum_n x(n-k) z^{-(n-k)} \\
&= z^{-k} \sum_m x(m) z^{-m} \\
&= z^{-k} X(z)
\end{aligned}
$$