LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för Elektro- och Informationsteknik

SIGNALBEHANDLING I MULTIMEDIA, EITA50, LP4, 2020
Inlämningsuppgift 1 av 2, Assignment 1 out of 2

Inlämningstid:	Lämnas in senast kl 18.00 onsdagen den 6 maj 2020 via Canvas *To be handed in before May 06, 18:00, via Canvas*
Observera:	För att underlätta rättningen: *In order to simplify the correction:* Skriv lösningarna på engelska. *Write the solutions in English.* Lös endast en uppgift per blad. *Solve only one problem per paper.* Skriv namn och personnummer på samtliga blad. *Write your name and personal ID number on every paper.* Påståenden ska motiveras via resonemang och/eller ekvationer. *Statements should be motivated by reasoning and/or equations.* Poäng från inlämningsuppgifterna adderas till tentamensresultatet. *The points from the assignments will be added to the examination score.* Max total poäng (tenta + 2 inlämningar) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0 *Max total score (exam + 2 assigments) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0* Betygsgränser för kursen: 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p). *Grading: 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).*

1. Ange vilka av nedanstående påståenden som är sanna respektive falska.
   Indicate which of the following statements are true and which are false.
   (4 rätt av 5 ger 0.1 poäng) *(4 correct answers out of 5 gives 0.1p)*

   a) Ett FIR-filter kan vara stabilt eller instabilt.
   A FIR filter can be stable or unstable.

   b) En faltning av två sekvenser i tidsdomänen motsvaras av en multiplikation av Z-transformerna för signalerna.
   A convolution of two sequences in the time domain corresponds to a multiplication of the Z transforms of the signals.

   c) Ett IIR-filter är alltid stabilt.
   An IIR filter is always stable.

   d) Ett första ordningens FIR-filter är stabilt om och endast om absolutvärdet av faktorn framför y(n-1) är större än 1.
   A first order FIR filter is stable if and only if the absolute value of the factor in front of y(n-1) is larger than 1.

   e) Ett IIR-filter kan vara ett linjär fas-system.
   An IIR-filter can be a linear-phase system.

2. En tidsdiskret krets beskrivs av differensekvationen:
A discrete-time system is described by the difference equation:

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{3}{64}y(n-2) = x(n)$$

a) Bestäm systemfunktionen $H(z)$ och impulssvaret $h(n)$ för systemet, samt rita ett pol-nollställediagram. Är systemet stabilt? (0.1p)
Determine the system function $H(z)$ and the impulse response $h(n)$ for the system and draw a pole-zero plot. Is the system stable?

b) Följande signal är insignal till systemet
The following signal is the input signal to the system

$$x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$$

där $u(n)$ är stegfunktionen. Lös differensekvationen genom att använda Z-transformen, det vill säga, bestäm ett slutet uttryck för utsignalen $y(n)$. (0.1 p)
where $u(n)$ is the step function. Solve the difference equation by using the Z-transform, that is, determine a closed form expression for $y(n)$.

3. a) Följande kontinuerliga signal är given
The following continuous signal is given

$$x(t) = sin(\omega t)$$

Bestäm derivatan $\frac{d}{dt}x(t)$ med användning av Eulers formler! (0.1p)
Determine the derivative $\frac{d}{dt}x(t)$ using Euler's formulae!

b) Hur avläser man om ett system är stabilt i ett pol-nollställediagram? Hur avläser man om ett systems impulssvar kan innehålla svängningar? (0.1p)
How can you see whether a system is stable from a pole-zero diagram? How can you see whether the impulse response can contain oscillations?.

LÖSNINGAR Inlämningsuppgift 1, EITA50, LP4, 2020

Lösning 1.

a) Falskt. Ett FIR-filter är alltid stabilt.
False. A FIR filter is always stable.

b) Sant. Faltning i tidsdomänen motsvaras av multiplikation i transformdomänen.
True. Convolution in the time domain corresponds to multiplication in the transform domain.

c) Falskt. Ett IIR-filter kan vara stabilt eller instabilt.
False. An IIR filter can be stable or unstable.

d) Falskt. Ett första ordningens IIR-filter är stabilt om faktorn framför y(n-1) är mindre än 1. Ett FIR-filter är alltid stabilt.
False. A first-order IIR filter is stable if the factor in front of y(n-1) is less than 1. An FIR filter is always stable.

e) Falskt. Ett IIR-filter kan inte ha linjär fas.
False. An IIR filter cannot be linear phase.

Lösning 2a. Z-transformera differensekvationen:
Z transform the difference equation:

$$Y(z)(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{3}{64}z^{-2}) = X(z)$$

$H(z)$ är
$H(z)$ is

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{3}{64}z^{-2}}$$

Inverstransformering av $H(Z)$ ger impulssvaret $h(n)$. Bestäm först polerna:
The inverse transform of $H(z)$ gives the impulse response $h(n)$. First find the poles:

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{3}{64}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-\frac{1}{2}z^1+\frac{3}{64}}$$

$$z = \frac{2}{8} \pm \sqrt{\frac{4}{64}-\frac{3}{64}} => \quad p_1 = \frac{1}{8}, \quad p_2 = \frac{3}{8}$$

Systemfunktionen är
The system function is

$$H(z) = \frac{A}{1-\frac{3}{8}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{8}z^{-1}}$$

Handpåläggningsmetoden ger $A = \frac{3}{2}$ och $B = -\frac{1}{2}$.
Identification gives $A = \frac{3}{2}$ and $B = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{3}{64}z^{-2}} && (1) \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{8}z^{-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{8}z^{-1}} && (2) \end{aligned}$$

Impulssvaret ges då av
The impulse response is

$$h(n) = \left(\frac{3}{2}(\frac{3}{8})^n - \frac{1}{2}(\frac{1}{8})^n\right)u(n)$$

Polerna är $p_1 = \frac{1}{8}$ och $p_2 = \frac{3}{8}$. Systemet är stabilt eftersom polerna ligger innanför enhetscirkeln. Alla nollställen ligger i 0.
The poles are $p_1 = \frac{1}{8}$ and $p_2 = \frac{3}{8}$. The system is stable because the poles are located inside the unit circle. All zeros are located in 0.

Lösning 2b. I Z-domänen ges utsignalen av $Y(z) = H(z)X(z)$. Bestäm $X(z)$ genom att leta i tabell:
In the Z domain, the output signal is given by $Y(z) = H(z)X(z)$. Find $X(z)$ by looking in a table:

$$X(z) = \frac{1}{1-(\frac{2}{8})z^{-1}}$$

Detta ger att $Y(z)$ blir
This gives $Y(z)$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{(1-\frac{1}{8}z^{-1})(1-\frac{2}{8}z^{-1})(1-\frac{3}{8}z^{-1})} \\ &= \frac{A}{1-\frac{1}{8}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{2}{8}z^{-1}} + \frac{C}{1-\frac{3}{8}z^{-1}} \end{aligned}$$

Handpåläggningsmetoden ger $A = \frac{1}{2}, B = -4$ och $C = \frac{9}{2}$. Z-transformen för utsignalen är alltså:
Identification gives $A = \frac{1}{2}, B = -4$ och $C = \frac{9}{2}$. Thus, the Z transform of the output signal is:

$$Y(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{8}z^{-1}} - 4\frac{1}{1-\frac{2}{8}z^{-1}} + \frac{9}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{8}z^{-1}}$$

och utsignalen (lösningen på differensekvationen) blir
and the output signal (the solution to the difference equation) is

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}(\frac{1}{8})^n - 4(\frac{2}{8})^n + \frac{9}{2}(\frac{3}{8})^n\right)u(n)$$

Lösning 3. a Skriv om $sin(\omega t)$ med Eulers ekvation, derivera, och identifiera $cos(\omega t)$.
Rewrite $sin(\omega t)$ with Euler's equation, derive, and identify $cos(\omega t)$.

$$\frac{d}{dt}sin(\omega t) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{d}{dt}\frac{1}{2j}e^{-j\omega t}$$

$$= \frac{j\omega}{2j}e^{j\omega t} - \frac{-j\omega}{2j}e^{-j\omega t} = \frac{\omega}{2}e^{j\omega t} + \frac{\omega}{2}e^{-j\omega t} = \omega(\frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}) = \omega cos(\omega t)$$

b Ett system är stabilt om samtliga poler ligger innanför enhetscirkeln. Impulssvaret kan innehålla oscillationer om polerna är komplexkonjugerade.
A system is stable if all poles are inside the unit circle. The impulse response can contain oscillations if the poles are complex conjugated.