G. KRISTENSSON
APRIL 81

NÅGOT OM KOVARIANT FORMULERING

1. Inledning

En händelse transformeras mellan två tröghetssystem S och S' m.h.a. Lorentz-transformationen:

$$\begin{cases} t' = (t - vx/c^2)\gamma \\ x' = (x - vt)\gamma \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad (1)$$

där $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Inför nu den <u>kontravarianta koordinatvektorn</u>

$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ där

$$\begin{cases} x^0 \equiv ct \\ x^1 \equiv x \\ x^2 \equiv y \\ x^3 \equiv z \end{cases}$$

Definiera den <u>metriska tensorn</u> (matris)

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \mu = 0 \\ = 1 \\ = 2 \\ = 3 \end{matrix}$$

samt den <u>kovarianta koordinatvektorn</u>

$$x_\mu \equiv \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -x, -y, -z)$$

<u>Einsteins summeringskonvention:</u> $\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu$

(upprepade index summeras (ett uppe och ett nere))

$$x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 =$$

$$= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct)^2 - r^2$$

Vi kan nu skriva ner Lorentz-transformationen i en mer kompakt form.

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\mu \qquad (2)$$

där $L^\mu{}_\nu$ för en transformation längs x-axeln ($\vec{v} = v\hat{e}_x$) är

$$L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

ty i komponentform är (2)

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ct' = x'^0 = \gamma x^0 - \gamma x^1 v/c = \gamma(ct - xv/c) \\ x' = x'^1 = -\gamma x^0 v/c + \gamma x^1 = \gamma(x - vt) \\ y' = x'^2 = x^2 = y \\ z' = x'^3 = x^3 = z \end{cases}$$

vilket är identiskt med (1)

<u>Anm.</u> Om $\vec{v}$ ej är parallell med x-axeln gäller fortfarande (2) men (3) har ett mer komplicerat utseende. För en helt allmän hastighet $\vec{v}$ är $L^\mu{}_\nu$ "helt fylld".

2. Invarians av intervall

Vi studerar två händelser i S och S'. Välj koordinatsystem så att den ena händelsen inträffar då S och S' sammanfaller. Den andra händelsen är då x^μ i S och x'^μ i S'. Sambandet mellan x^μ och x'^μ ges av (2)

$$x'^\mu x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} L^\mu{}_\alpha x^\alpha L^\nu{}_\beta x^\beta = g_{\mu\nu} L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta$$

Beräkna $g_{\mu\nu} L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta = L^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} L^\nu{}_\beta$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

där $(\ )^t$ står för transponering (rader och kolonner byter plats).

Multiplikation av matriserna ger:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ \gamma v/c & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma^2 - \gamma^2 v^2/c^2 & -\gamma^2 v/c + \gamma^2 v/c & 0 & 0 \\ -\gamma^2 v/c + \gamma^2 v/c & \gamma^2 v^2/c - \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi får

$$x'^{\mu} x'_{\mu} = \underbrace{g_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta}}_{g_{\alpha\beta}} x^{\alpha} x^{\beta} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = x^{\alpha} x_{\alpha} = x^{\mu} x_{\mu} \qquad (4)$$

<u>Definition:</u> Intervallet ("avståndet") mellan två händelser definieras som $s^2 = x^{\mu} x_{\mu}$

Intervallet s^2 är oberoende av vilket tröghetssystem det uträknas i. Intervallet är invariant.

<u>Anm.</u> Jämför med avståndet mellan två punkter i tre dimensioner

Detta avstånd är oberoende av vilket koordinatsystem det uträknas i. $(\text{Avståndet})^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$ ($\vec{r}$ relativa vektorn)

3. Ljuskonen

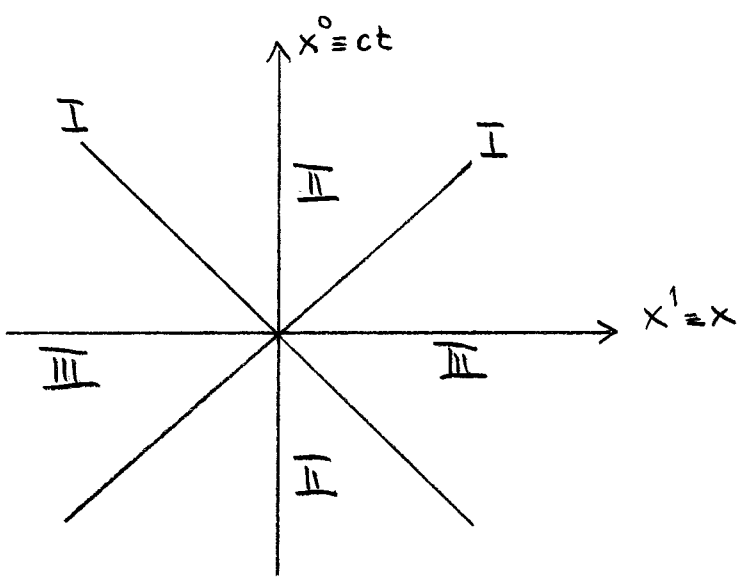
$x^\mu x_\mu$ fungerar som en skalärprodukt i den fyr-dimensionella rum-tiden. Vi kan använda $s^2 = x^\mu x_\mu$ för att klassificera två händelser som är separerade av vektor x^μ

I) $s^2 = 0$ intervallet är <u>ljusartat</u>

II) $s^2 > 0$ — " — <u>tidsartat</u>

III) $s^2 < 0$ — " — <u>rumsartat</u>

Allmänt är $s^2 = x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$

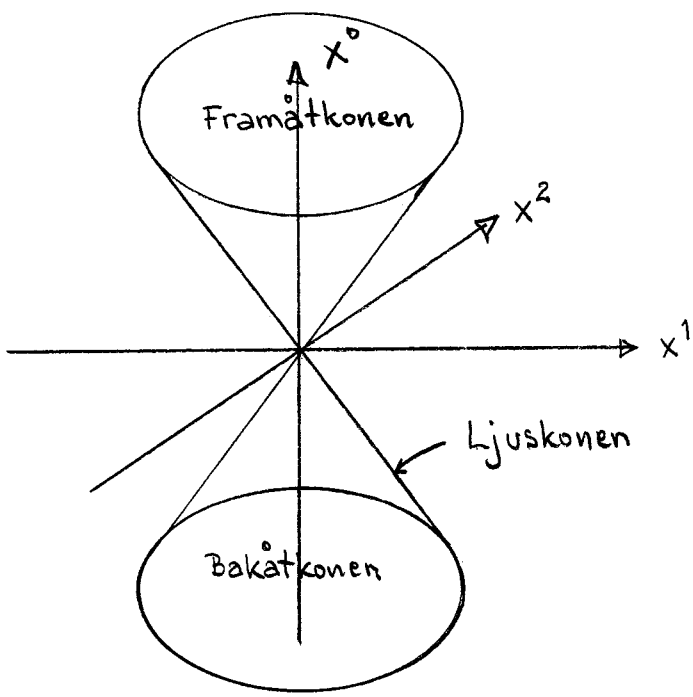


Rum-tiden uppdelas i tre områden. Ett ljusartat intervall (I) definierar den s.k. <u>ljuskonen</u>

1) Två händelser vars intervall är ljusartat kan sammanbindas med en ljussignal.

2) Två händelser vars intervall är tidsartat kan sammanbindas med en signal vars hastighet $v < c$.

3) Två händelser vars intervall är rumsartat kan ej sammanbindas med en signal vars hastighet $v < c$. Sådana händelser är ej kausala. (verkan kommer före orsaken i något tröghetssystem S)



Händelser i bakåtkonen kan påverka en händelse i origo kausalt.

En händelse i origo kan påverka en händelse i framåtkonen kausalt.

Vilken hastighet u skall en sådan kausal signal ha för att sammanbinda händelserna?

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (ct)^2 - r^2 = (ct)^2(1 - r^2/(ct)^2) =$$

$$= (ct)^2(1 - u^2/c^2) \quad , \text{ ty } r/t = u$$

Definiera <u>egentiden</u> $\tau = t\sqrt{1 - u^2/c^2}$ för en partikel.

Egentiden är tiden en observatör i partikelns vilosystem uppmäter.

$$s^2 = c^2\tau^2$$

4. Kovariant formulering av impuls och energi

Den relativistiska impulsen $\vec{p}$ och energin E är

$$\begin{cases} \vec{p} = m\vec{u} = m_0\vec{u}/\sqrt{1-u^2/c^2} \\ E = mc^2 = m_0c^2/\sqrt{1-u^2/c^2} \end{cases} \qquad (5)$$

där $\vec{u}$ är partikelns hastighet och m_0 dess vilomassa.

Vidare har vi sambandet

$$p^2 - E^2/c^2 = -m_0^2c^2 = \text{konstant, oberoende av tröghetssystem } S \qquad (6)$$

Vi definierar den kontravarianta impulsvektorn (fyraimpulsen)

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) \qquad \text{där}$$

$$\begin{cases} p^0 \equiv E/c = m_0c/\sqrt{1-u^2/c^2} \\ p^1 \equiv mu_x = m_0u_x/\sqrt{1-u^2/c^2} \\ p^2 \equiv mu_y = m_0u_y/\sqrt{1-u^2/c^2} \\ p^3 \equiv mu_z = m_0u_z/\sqrt{1-u^2/c^2} \end{cases}$$

Om vi analogt med $x_\mu x^\mu = s^2$ bildar

$$p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 =$$

$$= E^2/c^2 - p^2 = m_0^2 c^2 \quad \text{enligt (6)}$$

Alltså

$$p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2 \quad (\text{en konstant ober. av } S) \qquad (7)$$

Vi ser att $p_\mu p^\mu$ fungerar som en skalärprodukt i den fyr-dimensionella rum-tiden, helt i analogi med vad vi fann för $x_\mu x^\mu = s^2$.

Detta indikerar att fyrimpulsen p_μ transformeras mellan två tröghetssystem S och S' på samma sätt som x^μ.

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu \qquad (2)$$

$$p'^\mu = L^\mu{}_\nu p^\mu \qquad (8)$$

Explicit om $\vec{v} = v\hat{e}_x$ $\qquad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$

$$\begin{cases} p'^0 = \gamma p^0 - \gamma v/c\, p^1 \\ p'^1 = -\gamma v/c\, p^0 + \gamma p^1 \\ p'^2 = p^2 \\ p'^3 = p^3 \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} E'/c = \gamma(E/c - v p_x/c) \\ p'_x = \gamma(p_x - vE/c^2) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases}$$

<u>Anm.</u> Impuls $\vec{p}$ och energi E är nu naturligt förenade i en fyr-dimensionell vektor p^μ, p.s.s. rum-tiden är förenad i vektorn x^μ

5. Fyrkraft

Vi kan nu också definiera ett relativistiskt kraftbegrepp genom att defiera fyrkraften F^μ

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \qquad (9)$$

Lägg märke till att i definitionen deriverar vi fyrimpulsen p^μ m.a.p. egentiden τ och inte m.a.p. tiden t. Detta beror på att egentiden $\tau = t\sqrt{1-u^2/c^2}$ är en invariant (samma värde $\tau = s/c$ i alla tröghetssystem)

I komponenter är fyrkraften

$$\begin{cases} F^0 = \dfrac{dp^0}{d\tau} = \dfrac{d}{d\tau}(E/c) = \dfrac{\frac{dE}{dt}}{c\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ F^1 = \dfrac{dp^1}{d\tau} = \dfrac{\frac{dp_x}{dt}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ F^2 = \dfrac{dp^2}{d\tau} = \dfrac{\frac{dp_y}{dt}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ F^3 = \dfrac{dp^3}{d\tau} = \dfrac{\frac{dp_z}{dt}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases}$$

Om vi inför den relativistiska kraften $\vec{f}$ definierad genom

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{samt} \quad \frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{u}$$

får vi

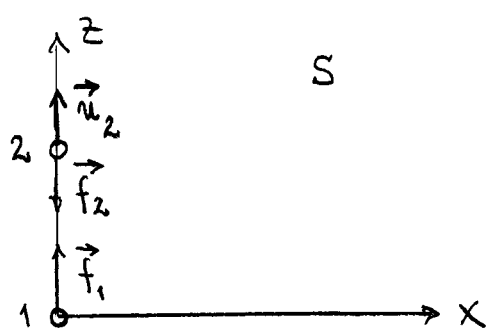
$$F^\mu = (\vec{f}\cdot\vec{u}/c,\ f_x,\ f_y,\ f_z)/\sqrt{1-u^2/c^2} \qquad (10)$$

och fyrkraften transformeras p.s.s som p^μ och x^μ, d.v.s.

$$F'^\mu = L^\mu{}_\nu F^\nu \qquad (11)$$

I orelativistisk mekanik har vi lärt oss att kroppar attraherar varandra med lika stora och motriktade krafter (Newtons tredje lag) som en konsekvens av impulskonservering. Vi undersöker nu fallet i relativistisk mekanik.

Antag, att $\begin{cases} \vec{f}_1 = (0,0,f) \\ \vec{f}_2 = (0,0,-f) \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{u}_1 = (0,0,0) \\ \vec{u}_2 = (0,0,u_2) \end{cases}$



där $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$

Fyrkraften i S är:

$$\begin{cases} F_1^\mu = (0,0,0,f) \\ F_2^\mu = (-fu_2/c,\ 0,\ 0,\ -f)/\sqrt{1-u_2^2/c^2} \end{cases}$$

I ett annat tröghetssystem S' ($\vec{v} = v\hat{e}_x$) är fyrkraften F'^{μ} enligt (11) och (3):

$$\begin{cases} F'^{0} = \gamma F^{0} - \gamma v/c\, F^{1} \\ F'^{1} = -\gamma v/c\, F^{0} + \gamma F^{1} \\ F'^{2} = F^{2} \\ F'^{3} = F^{3} \end{cases} \qquad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Vi får

$$\begin{cases} F_1'^{\mu} = (0, 0, 0, f) \\ F_2'^{\mu} = \left(-\gamma f u_2/c,\ \gamma \frac{v u_2}{c^2} f,\ 0,\ -f\right) / \sqrt{1 - u_2^2/c^2} \end{cases} \tag{12}$$

Hastigheterna $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ transformeras enligt addition av hastigheter (sid. 346 i lärobok):

$$\begin{cases} \vec{u}_1' = (-v, 0, 0) \Rightarrow u_1' = v \\ \vec{u}_2' = \left(-v, 0, u_2\sqrt{1 - v^2/c^2}\right) \Rightarrow u_2'^2 = v^2 + u_2^2(1 - v^2/c^2) \end{cases} \tag{13}$$

$$1 - u_2'^2/c^2 = 1 - \left(v^2 + u_2^2(1 - v^2/c^2)\right)/c^2 = 1 - u_2^2/c^2 - v^2/c^2(1 - u_2^2/c^2)$$

$$= (1 - u_2^2/c^2)(1 - v^2/c^2)$$

Kraften $\vec{f}'$ i S' fås ur F'^{μ}:

$$F'^{\mu} = (\vec{f}' \cdot \vec{u}_2'/c,\ f_x',\ f_y',\ f_z') / \sqrt{1 - u_2'^2/c^2}$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{f}_1' = (0,0,f)\sqrt{1-u_1'^2/c^2} = (0,0,f)\sqrt{1-v^2/c^2} \\ \vec{f}_2' = (\gamma \frac{v u_2}{c^2} f, 0, -f) \dfrac{\sqrt{1-u_2'^2/c^2}}{\sqrt{1-u_2^2/c^2}} = \left(\frac{v u_2}{c^2} f, 0, -f\sqrt{1-v^2/c^2}\right) \end{cases}$$

Vi har fått en x' komponent $\frac{v u_2}{c^2} f$ i S' och krafterna $\vec{f}_1'$ och $\vec{f}_2'$ är ej lika stora och motriktade.

<u>Impulslagen mer fundamental än Newtons tredje lag.</u>