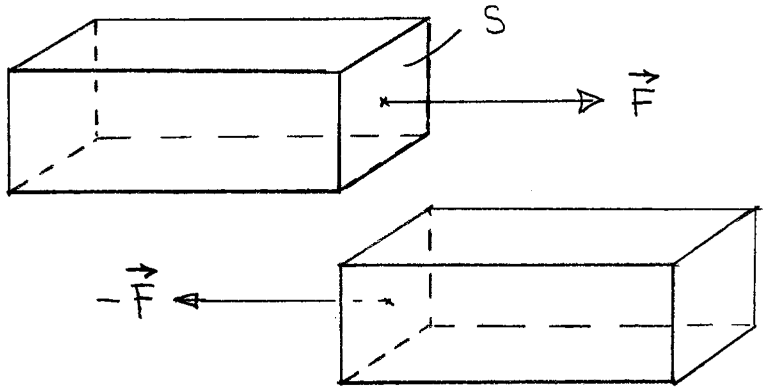
ELASTISKA MEDIER

Alla medier deformeras under inverkan av mekanisk belastning. Hos vissa material återgår deformationen efter att belastningen avlägsnats. Sådana material kallas <u>elastiska.</u>

1. Hookes lag

Betrakta följande stav med tvärsnittsarea S :



Kraften på vänster halva; verkan från höger halva.

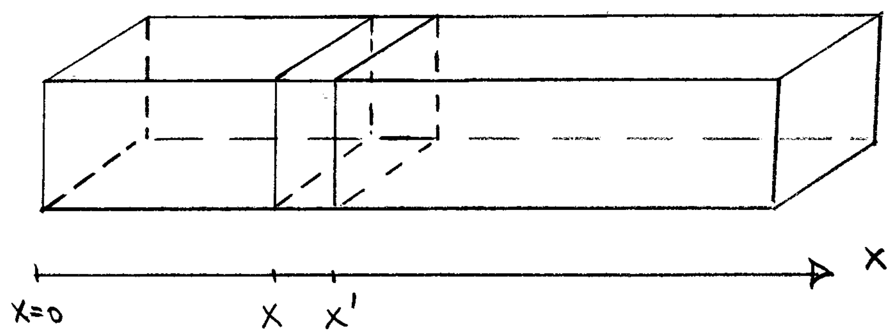
Kraften på höger halva; verkan från vänster halva.

Vi definierar <u>normalspänningen σ</u> som kraft / ytenhet, d.v.s.

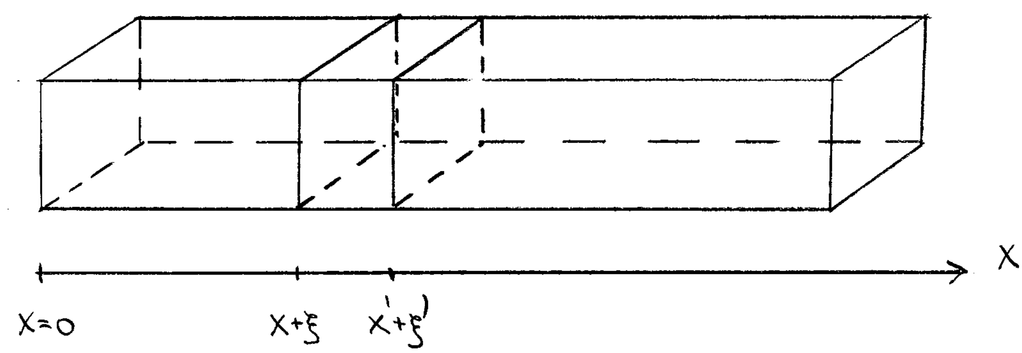
om kraften $\vec{F}$ är konstant över tvärsnittet:

$$\sigma = F/S \qquad \text{(positiv om } \vec{F} \text{ utåtriktad)} \qquad (1)$$

Vi skall nu enkelt analysera deformationen av en stav



Odeformerad stav



Deformerad stav

Materialet har deformerats så att tvärsnittet vid x nu är

vid $x+\xi$, och tvärsnittet vid x' vid $x'+\xi'$

Separationen mellan tvärsnitten hos den deformerade staven

är: $x' + \xi' - x - \xi = \Delta x + \Delta \xi$

där $\Delta x = x' - x$ och $\Delta \xi = \xi' - \xi$

Vi definier <u>normaltöjningen ε</u> som deformationen / längdenhet,

d.v.s.

$$\varepsilon = \Delta \xi / \Delta x$$

eller om vi låter $\Delta x \to 0$

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx} \qquad (2)$$

Hookes lag ger ett samband mellan spänning och töjning,

nämligen (Empirisk lag.)

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (3)$$

E är en konstant, <u>Youngs modul</u> eller <u>elasticitetsmodulen</u>,

och har samma dimension som spänning, d.v.s. kraft / ytenhet.

(Man ser ofta beteckningen Y för Youngs modul.)

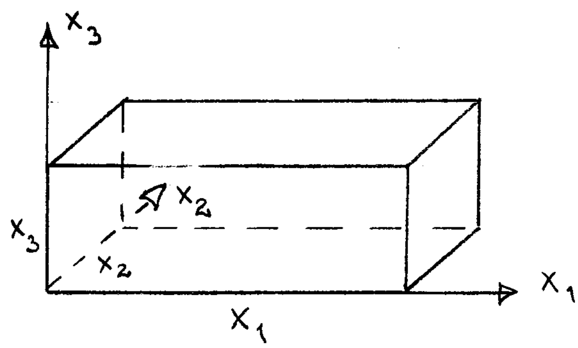
För att mäta E kan man t.ex. spänna fast ena ändan på staven och låten en konstant kraft $\vec{F}$ verka i andra ändan. Om stavens normala längd är L och om normalspänningen konstant får vi den totala töjningen ΔL hos staven

$$\Delta L = \int_0^{\Delta L} d\xi = \int_0^L \frac{d\xi}{dx}\,dx = \int_0^L \varepsilon\,dx = \int_0^L \frac{\sigma}{E}\,dx = \frac{\sigma}{E} L$$

d.v.s. $\Delta L = \frac{1}{E}\sigma L$ eller $E = \sigma \frac{L}{\Delta L}$ (4)

Med en deformation i längdled följer även en deformation i bredd och tjocklek. Om vi antar att materialet är isotropt (samma egenskaper i alla riktningar) skriver vi vanligen:

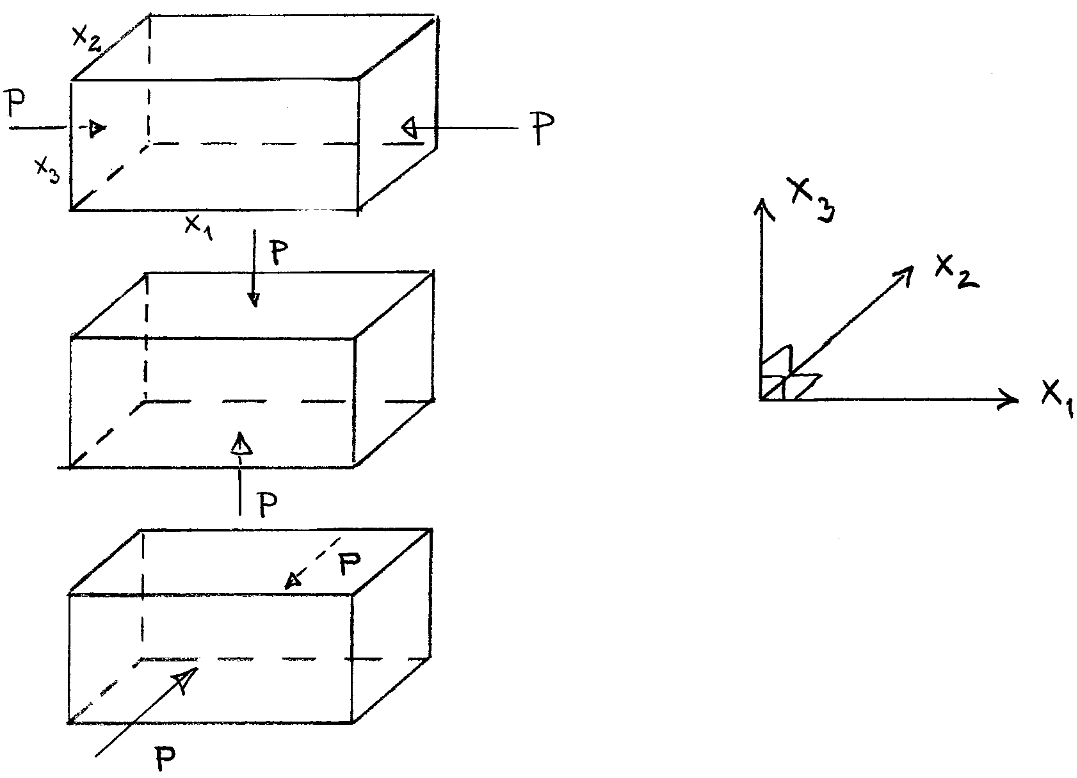
$$\frac{\xi_2}{x_2} = \frac{\xi_3}{x_3} = -\nu \frac{\xi_1}{x_1} \qquad (5)$$



Här är $\frac{\xi_i}{x_i}$, $i = 1, 2, 3$ (normal-) töjningen i x_i-riktningen, och ν är Poissons tal (ofta även tecknad σ).

2. Volymförändringar under statiska spänningar

Låt staven i figuren vara nedsänkt i en vätska, som belastar stavens ytor med normalspänningen (trycket) p. Vi vill beräkna volymförändringen hos staven jämfört med det obelastade fallet. Vi delar upp problemet i tre delar.



Vi får i det översta fallet en töjning i x_1- led

$\xi_1/x_1 = -p/E$

P.s.s. ger de två nedre fallen töjningar i x_2 och x_3 - led.

$\xi_2/x_2 = -p/E$

$\xi_3/x_3 = -p/E$

P.g.a. denna deformation i x_2 och x_3 - led får vi en ytterligare töjning i x_1- led.

$\xi_1/x_1 = -\nu(\xi_2/x_2) - \nu(\xi_3/x_3) = 2\nu p/E$

Totalt får vi töjningen i x_1-led.

$$\xi_1/x_1 = -(1-2\nu)\,p/E \qquad (6)$$

Då problemet är symmetriskt får vi p.s.s. totalt töjningen i x_2 och x_3- led

$$\begin{cases} \xi_2/x_2 = -(1-2\nu)p/E \\ \xi_3/x_3 = -(1-2\nu)p/E \end{cases} \qquad (7)$$

Förändring i volym $\frac{\Delta V}{V}$, där $V = x_1 x_2 x_3$ blir för små deformationer

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\xi_1}{x_1} + \frac{\xi_2}{x_2} + \frac{\xi_3}{x_3} = -3(1-2\nu)p/E \qquad (8)$$

Ofta skriver man

$$p = -K\frac{\Delta V}{V} \qquad (9)$$

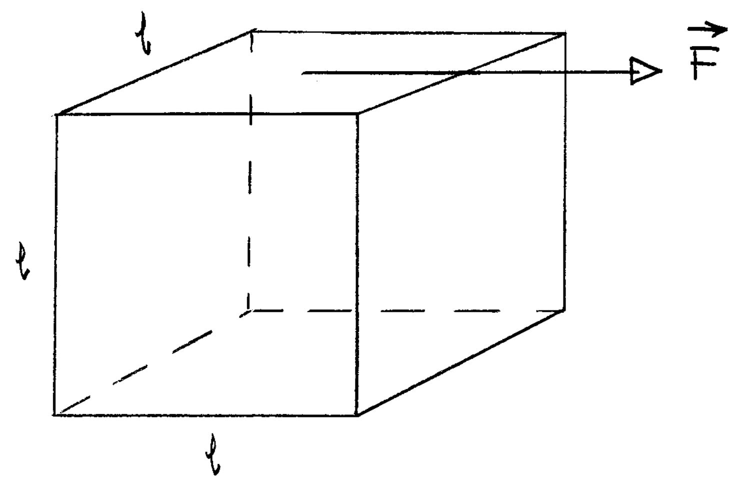
där K är materialets <u>kompressibilitet</u> eller <u>kompressionsmodul</u>

$$1/K = 3(1-2\nu)/E \qquad (10)$$

Vi ser att $\nu < 1/2$, ty annars ökar volymen då materialet sammanpressas, vilket är orimligt.

3. Skjuvningar

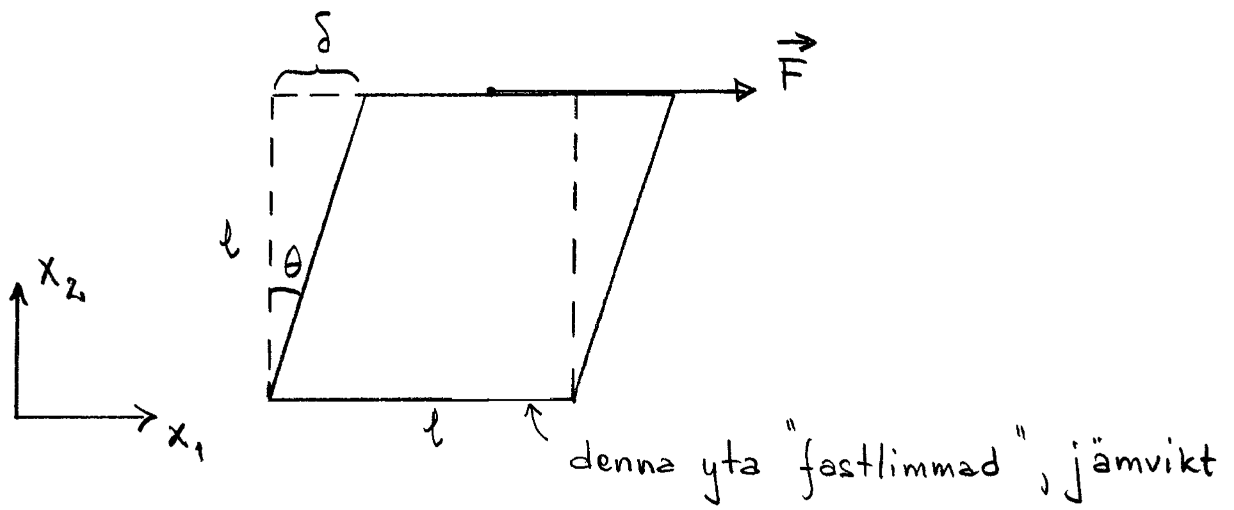
Om den deformerande kraften är parallell med ytan talar man om <u>skjuvkrafter</u>. För enkelhetens skull låter vi vår stav vara en kub med längden l.



Skjuvspänningen τ definierar vi som (S är ändytans area)

$$\tau = F/S \tag{10}$$

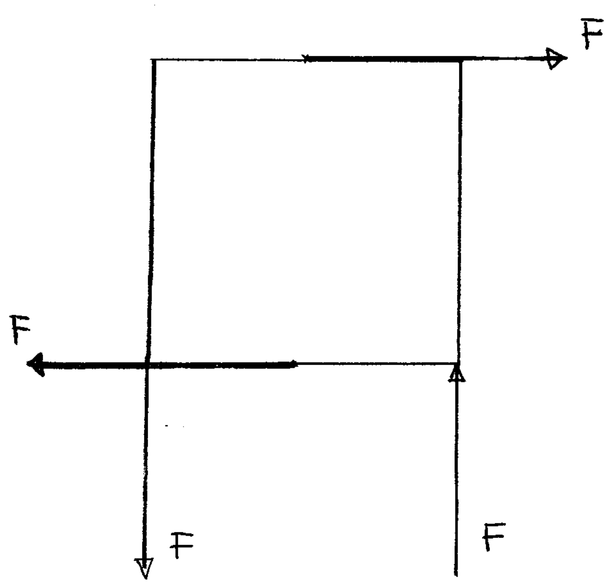
Vi analyserar ett deformerat tillstånd



I likhet med Hooks lag definierar vi nu <u>skjuvmodulen</u> G (ofta betecknad μ).

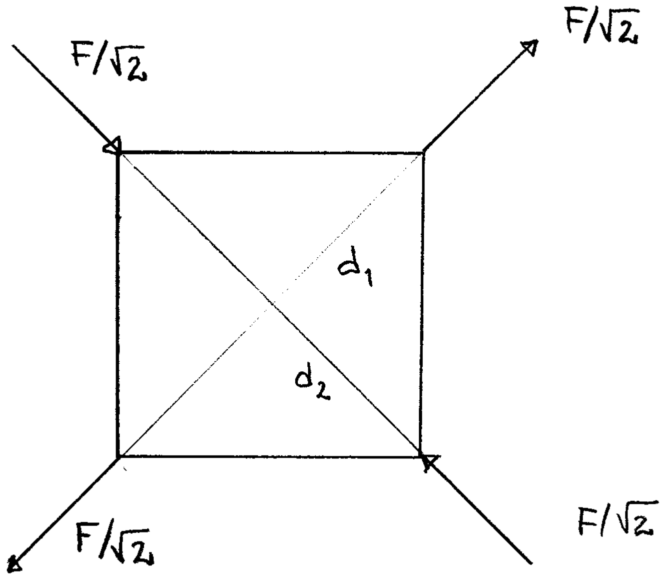
$$\tau = G\delta/\ell = G\tan\theta \tag{11}$$

Vi skall nu härleda ett samband mellan G och E och ν, och först analyserar vi underlagets verkan på kuben. För jämvikt får vi (kraft- <u>och</u> momentjämvikt):



Underlaget svarar mot summan av de tre nedre krafterna.

Dela upp samtliga krafter enligt:

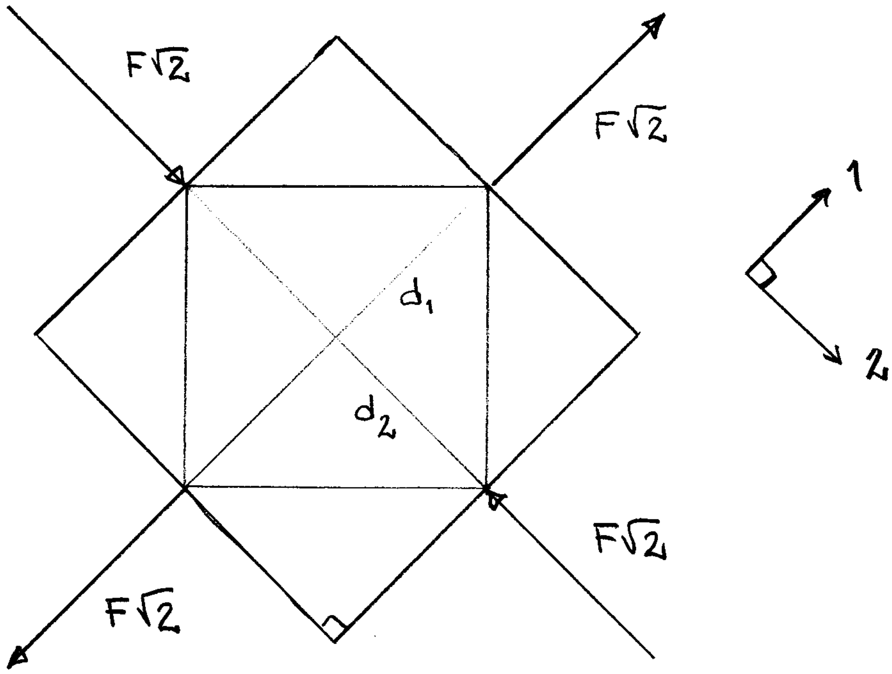


Notera att de tangentiella krafternas angreppspunkt får

förflyttas längs kraftens riktning.

Komplettera nu kuben så vi kan analysera spänningstillståndet

i analogi med sektion 2.



Märk att för att behålla rätt spänningstillstånd

så måste krafterna fördubblas, ty volymen har fördubblats!

Vi har nu fått ett fall vi kan behandla i analogi med

sektion 2. Vi får normalspänningarna i 1 och 2 riktningarna:

$$\sigma_1 = F\sqrt{2}/s\sqrt{2} = F/s = \tau$$

$$\sigma_2 = -F\sqrt{2}/s\sqrt{2} = -F/S = -\tau$$

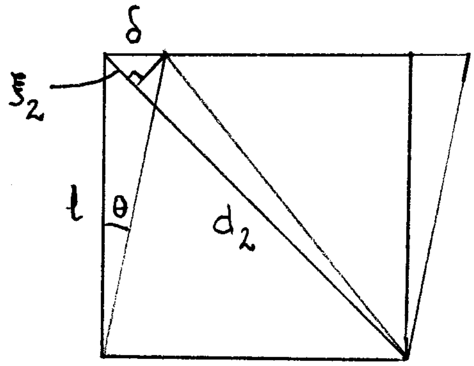
ty tvärsnittsarean är nu $\sqrt{2}\,S$.

Den totala töjningen av diagonalerna blir

$$\begin{aligned} \xi_1/d_1 &= \sigma_1/E - \nu\sigma_2/E = (1+\nu)\tau/E \\ \xi_2/d_2 &= \sigma_2/E - \nu\sigma_1/E = -(1+\nu)\tau/E \end{aligned} \tag{12}$$

Den ena diagonalen förkortas, den andra förlängs!

Ur följande figur får vi (små deformationer)



$$\xi_2 = \delta/\sqrt{2}$$

$$d_2 = \sqrt{2}\,l$$

Vi får

$$(1+\nu)\tau/E = |\xi_2/d_2| = \frac{\delta}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\,l} = \frac{1}{2}\frac{\delta}{l} = \frac{1}{2}\tan\theta = \frac{1}{2}\tau/G$$

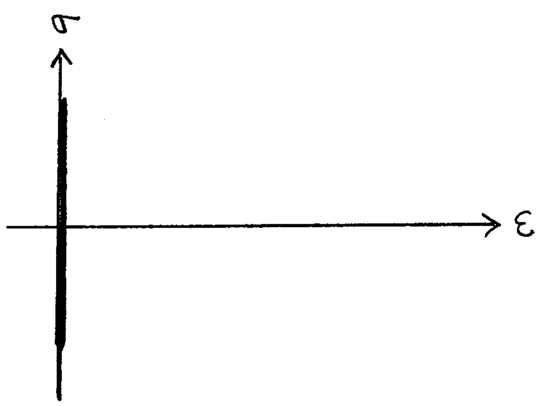
Vi får till slut sambandet

$$1/G = \frac{2(1+\nu)}{E} \qquad (13)$$

4. Lite om materialklasser

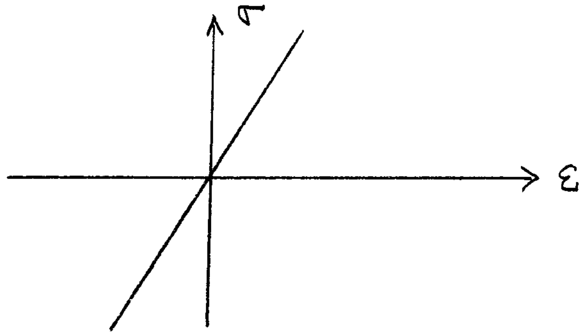
Vi har ovan studerat en speciell klass av material, linjära elastiska material, d.v.s. Hooks lag gäller. Mera allmänt kan man indela material i olika klasser, beroende på hur de deformeras under spänningar.

a) Ett stelt material (en idealisering, finns ej i verkligheten) deformeras ej under spänningar. Dess spännings-töjningskurva ser ut som



Stelt material

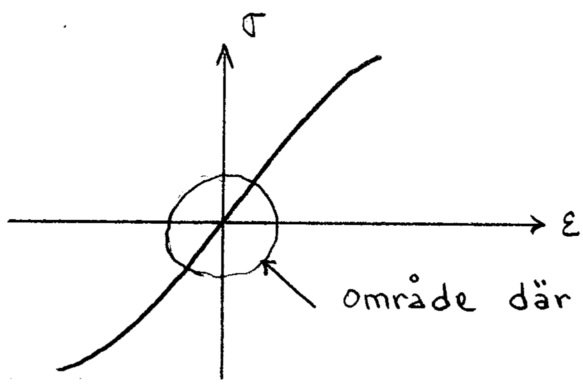
b) Ett <u>linjärt elastiskt material</u> reagerar linjärt på en spänning σ. (Hooks lag gäller)



Ex. Metaller o. kristalina ämnen under små def.

Linjärt elastiskt material

c) Ett <u>ickelinjärt elastiskt material</u> har följande spännings-töjningskurva.

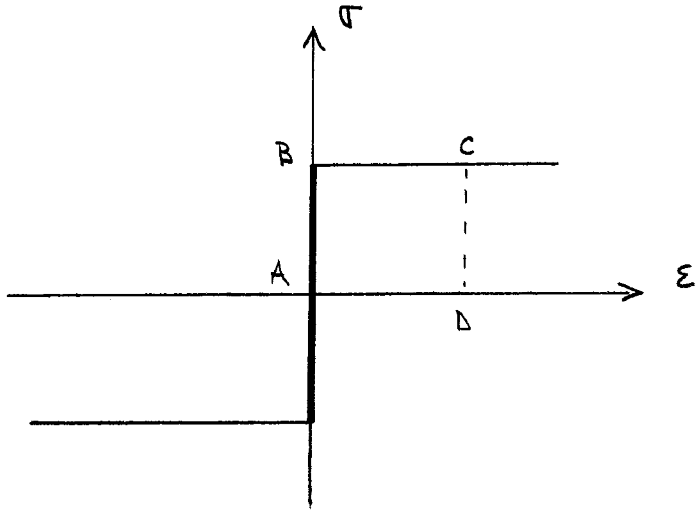


Ex. Gummi, betong

Ickelinjärt elastiskt material

d/ Ett <u>stelt idealplastiskt material</u> har följande spännings-töjningskurva.

Ex. mjukt kolstål



Stelt idealplastiskt material

I området A→B är materialet stelt, medan det sedan i området B→C plastiskt flyter (kan ej ta upp högre spänningar). Vid en avlastning återstår seden en deformation (C→D).

Mer realistiska modeller för material kan fås genom olika kombinationer av a/ - d/.

De linjärt elastiska materialen är viktiga och

vi har ovan funnit sambanden mellan materialparametrarna.

$$\begin{cases} K = E/3(1-2\nu) \\ G = E/2(1+\nu) \end{cases}$$

Endast två av parametrarna är linjärt oberoende

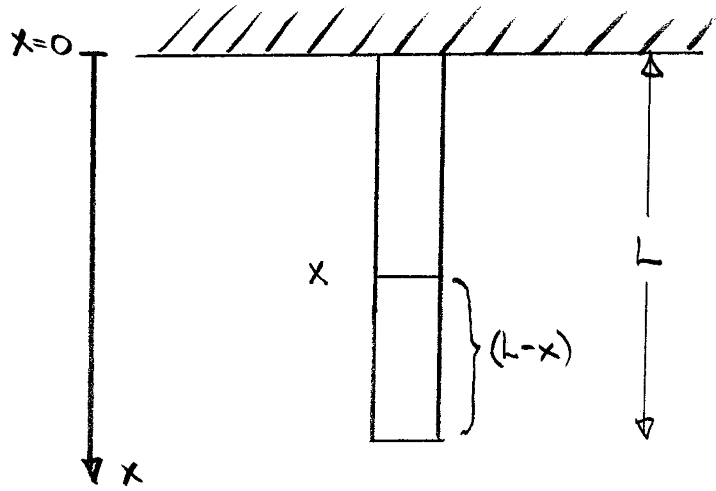
Några data på material (10^{11} N/m^2)

Material	E	G	$\nu = \frac{E}{2G} - 1$
Al	0.70	0.24	0.46
Cu	1.25	0.46	0.36
Fe	2.06	0.82	0.27
Pb	0.16	0.054	0.48
Ni	2.1	0.72	0.46
Stål	2.0	0.80	0.25

↑ ca 0.3 - 0.4 för metaller

5. Ett enkelt exempel på statiskt problem

Exempel Beräkna förlängningen av en rak hängande stav på grund av sin egen tyngd.



Spänningen σ på ett tvärsnitt vid x är

$$\sigma = mg \, \underbrace{\frac{L-x}{L}}_{} / S$$ del av staven nedanför x

där S är tvärsnittsarean och m stavens totala massa.

Hooks lag ger förlängningen $\xi(x)$

$$\sigma = E\varepsilon = E\,\frac{d\xi}{dx}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = (L-x)\,\frac{mg}{LSE} = (L-x)\,A$$

där $A = mg/LSE$

Integration ger

$$\xi(x) - \xi(0) = \int_0^x \frac{d\xi}{dx}\, dx = A \int_0^x (L-x)\, dx = A\left(Lx - \tfrac{1}{2}x^2\right)$$

Vi kraver att $\xi(0)=0$; ingen förlängning vid infästningen.

$$\xi(x) = Ax(L-\tfrac{1}{2}x)$$

Vid stavens ändpunkt $x=L$ har vi förlängningen

$$\xi(L) = AL(L-\tfrac{1}{2}L) = \tfrac{1}{2}AL^2 = \tfrac{1}{2}\, mgL/SE$$

Jämför detta uttyck med den förlängning man får om man endast har en kraft mg <u>i stavens ändpunkt</u>

$$\xi(L) = mgL/SE \quad (\text{jfr härl. av } (4))$$