

## Övning 3

### Vad du ska kunna efter denna övning

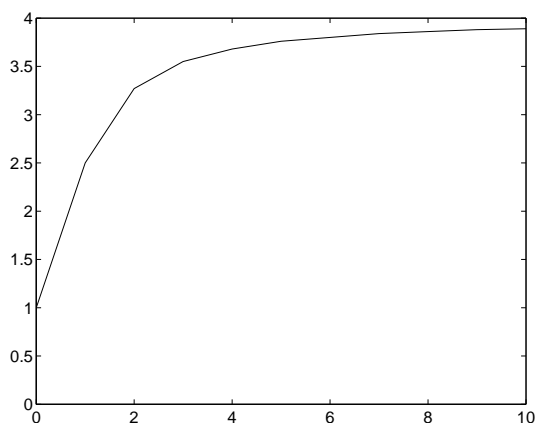
- Kunna dra slutsatser om t ex ett systems betjäningstider och antalet köplatser genom att tolka diagram.
- Kunna beräkna medeltid i systemet och spärrsannolikhet när antalet kunder är begränsat.
- Kunna beräkna den *avverkade trafiken* i ett system. Observera att den avverkade trafiken är detsamma som medelantal upptagna betjänare.
- Kunna beräkna *anropsspärren* och *tidsspärren* för ett markovskt kösystem.

### Problem, nivå A

1. Antag att vi har ett M/M/1-system med två köplatser och fyra kunder. Antag vidare att ankomstintensiteten för en ledig kund är  $\beta \text{ s}^{-1}$ , samt att betjäningintensiteten är  $\mu \text{ s}^{-1}$ .
  - (a) Rita tillståndsdigram.
  - (b) Beräkna den avverkade trafiken = medelantal upptagna betjänare.
  - (c) Beräkna sannolikheten att en kund spärras.
  - (d) Beräkna hur många kunder som i medeltal betjänas per sekund.
2. Antag att vi kan modellera ett system som ett M/M/2-system med sex kunder och en köplats. När en kund har fått ett svar från systemet så tänker kunden i medeltal 1 s innan han skickar ett nytt jobb till systemet. Medelbetjäningstiden är 0.5 s.
  - (a) Rita Markovkedjan för detta system.
  - (b) Bestäm den stationära tillståndsfördelningen.
  - (c) Bestäm tidsspärr samt anropsspärr.
  - (d) Bestäm den avverkade trafiken i systemet.
  - (e) Bestäm hur många kunder som spärras per sekund i medeltal.
3. Ankomstintensiteten till ett M/M/1-system är  $\lambda$ . Vid varje ankomst kommer två kunder till systemet. Betjänares behandlar kunderna en och en med intensiteten  $\mu$ .
  - (a) Rita tillståndsdigram och ställ upp ekvationerna för  $p_k$  med hjälp av snittmetoden.
  - (b) Bestäm z-transformen för antalet kunder i systemet utgående från ekvationerna i a).
  - (c) Beräkna medelantal kunder i systemet.

4. I denna uppgift skall vi analysera en webserver. Vi antar att nya jobb, dvs HTTP-requests, ankommer enligt en Poissonprocess med medelvärde  $\lambda$  s<sup>-1</sup>. Vi antar också att själva servern kan modelleras som en betjänares med en begränsad kö med  $K$  platser. Jobben behandlas enligt First-Come-First-Served principen. Medelbetjäningstiden är  $\bar{x}$  s. I diagrammet nedan visas den uppmätta medelsvarstiden,  $T$ , (i sekunder) för ett godtyckligt jobb som betjänas som en funktion av ankomstintensiteten. Vi har mätt svarstiden för olika ankomstintensiteter. Bestäm följande från diagrammet:

- (a) Medelbetjäningstiden för ett godtyckligt jobb, dvs  $\bar{x}$ .
- (b) Antalet köplatser, dvs  $K$ .

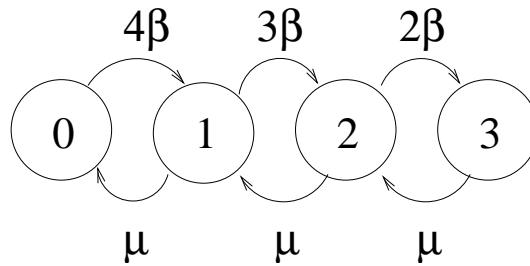


### Problem, svårare nivå (B och C)

- 5. Betrakta ett M/M/∞-system där kunder kommer i grupper om två. Det kommer i medeltal  $\lambda$  grupper per sekund. Kunderna betjänas en och en och betjäningensintensiteten är  $\mu$ .
  - (a) Rita Markovkedjan för systemet och ställ upp tillståndsekvationerna.
  - (b) Bestäm den differentialekvation som måste lösas för att få fram z-transformen för antalet kunder i systemet genom att först multiplicera tillståndsekvationerna med  $z^k$  och sedan addera dem.
  - (c) Visa att  $P(z) = C e^{\lambda(z+z^2/2)/\mu}$  är en lösning till differentialekvationen.
  - (d) Bestäm  $C$ .
  - (e) Bestäm medelantal kunder i systemet.
  - (f) Vilken relation måste råda mellan  $\lambda$  och  $\mu$  för att systemet ska vara stabilt?
- 6. Kunderna som befinner sig i kön i ett M/M/1-system med  $K$  köplatser blir otåliga. Så länge en kund befinner sig i kön lämnar den kön utan att få betjäning med intensiteten  $\mu/2$ . Ankomstintensiteten är  $\lambda$  och betjäningensintensiteten är  $\mu$ .
  - (a) Bestäm tillståndssannolikheterna.
  - (b) Beräkna medelantalet spärrade ankomster per tidsenhet.
  - (c) Beräkna medelantalet avgångar utan betjäning från kön per tidsenhet.

### Lösningar till övning 3

1. (a) Markovkedjan blir



- (b) Vi använder snittmetoden och inför  $\alpha = \beta/\mu$ . Det ger

$$\begin{aligned} 4\beta p_0 &= \mu p_1 \Rightarrow p_1 = 4\alpha p_0 \\ 3\beta p_1 &= \mu p_2 \Rightarrow p_2 = 12\alpha^2 p_0 \\ 2\beta p_2 &= \mu p_3 \Rightarrow p_3 = 24\alpha^3 p_0 \end{aligned}$$

Sedan utnyttjar vi att summan av alla sannolikheter ska vara = 1 för att bestämma  $p_0$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 4\alpha + 12\alpha^2 + 24\alpha^3}$$

Nu får vi medelantal upptagna betjänare (= avverkad trafik) som

$$\bar{N}_s = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (p_1 + p_2 + p_3) = \frac{4\alpha + 12\alpha^2 + 24\alpha^3}{1 + 4\alpha + 12\alpha^2 + 24\alpha^3}$$

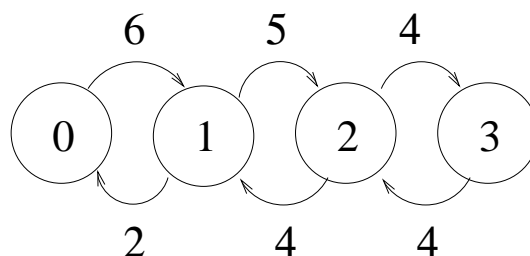
- (c) Sannolikheten att en kund spärras blir

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_3 p_3}{\sum_{k=0}^3 \lambda_k p_k} &= \frac{\beta 24\alpha^3 p_0}{4\beta \cdot p_0 + 3\beta \cdot 4\alpha p_0 + 2\beta \cdot 12\alpha^2 p_0 + \beta \cdot 24\alpha^3 p_0} \\ &= \frac{24\alpha^3}{4 + 12\alpha + 24\alpha^2 + 24\alpha^3} \end{aligned}$$

- (d) Antal kunder som betjänas per sekund är

$$\lambda_{\text{eff}} = 4\beta p_0 + 3\beta p_1 + 2\beta p_2$$

2. (a) Markovkedjan ser ut så här:



(b) Vi ställer upp tillståndsekvationerna med hjälp av snittmetoden

$$\begin{aligned} 6p_0 &= 2p_1 \\ 5p_1 &= 4p_2 \\ 4p_2 &= 4p_3 \end{aligned}$$

Löser vi dessa ekvationer (med hjälp av att  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ) så får vi

$$\begin{aligned} p_0 &= 4/46 \\ p_1 &= 12/46 \\ p_2 &= 15/46 \\ p_3 &= 15/46 \end{aligned}$$

(c) Tidsspärren är  $= p_3 = 15/46 \approx 0.33$  Anropsspärren blir

$$\frac{\lambda_3 p_3}{\sum_{k=0}^3 \lambda_k p_k} = \frac{45}{189} \approx 0.24$$

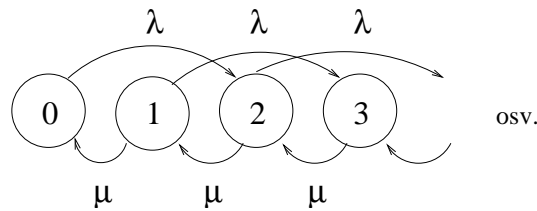
(d) Den avverkade trafiken är medelantal upptagna betjänare. Den kan vi beräkna med hjälp av definitionen av medelvärde, så här:

$$\begin{aligned} \bar{N}_s &= 0 \cdot P(0 \text{ upptagna betjänare}) + \\ &+ 1 \cdot P(1 \text{ upptagna betjänare}) + \\ &+ 2 \cdot P(2 \text{ upptagna betjänare}) = \\ &= p_1 + 2(p_2 + p_3) = \\ &= \frac{72}{46} \approx 1.57 \end{aligned}$$

(e) Medelvärdet av antalet kunder som spärras per sekund blir

$$\lambda_3 p_3 = 3 \cdot \frac{15}{46} = 0.98$$

3. (a) Markovkedjan blir



Vi använder snittmetoden. Observera att alla snitt utom det första skär av tre bågar i Markovkedjan. Därför är det två termer i högerledet utom i första ekvationen. Vi får

$$\begin{aligned} \mu p_1 &= \lambda p_0 \\ \mu p_2 &= \lambda(p_0 + p_1) \\ \mu p_3 &= \lambda(p_1 + p_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(b) Multiplicera ekvation  $k$  ovan med  $z^k$ . Det ger

$$\begin{aligned}\mu p_1 z &= \lambda p_0 z \\ \mu p_2 z^2 &= \lambda(p_0 + p_1)z^2 \\ \mu p_3 z^3 &= \lambda(p_1 + p_2)z^3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Om vi adderar alla ekvationer får vi

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k = \lambda \left( p_0 z + \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+2} p_k + \sum_{k=1}^{\infty} z^{k+1} p_k \right)$$

Definitionen av z-transform är

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k$$

vilket insatt i ekvationen ovan ger

$$\mu(P(z) - p_0) = \lambda(p_0 z + z^2 P(z) + z(P(z) - p_0))$$

Löser man ut  $P(z)$  så får man

$$P(z) = \frac{\mu p_0}{\mu - \lambda z - \lambda z^2}$$

För att bestämma  $p_0$  så observerar vi att för z-transformen måste gälla

$$P(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

I vårt fall måste då gälla att

$$P(1) = \frac{\mu p_0}{\mu - 2\lambda} = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{\mu - 2\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2\lambda}{\mu}$$

Slutligen får vi

$$P(z) = \frac{\mu}{\mu - \lambda z - \lambda z^2} \cdot \left( 1 - \frac{2\lambda}{\mu} \right)$$

(c) För att bestämma medelvärdet deriverar vi först  $P(z)$

$$P'(z) = \frac{\mu p_0 (\lambda + 2\lambda z)}{(\mu - \lambda z - \lambda z^2)^2}$$

Därefter får vi medelvärdet genom att låta  $z \rightarrow 1$

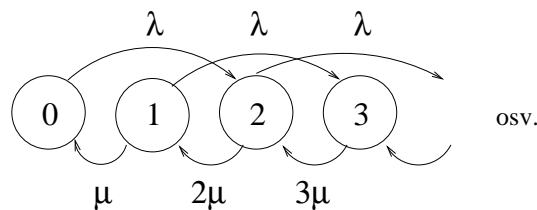
$$E(N) = \lim_{z \rightarrow 1} P'(z) = \frac{\mu p_0 (\lambda + 2\lambda)}{(\mu - 2\lambda)^2} = \frac{3\lambda}{\mu - 2\lambda}$$

4. (a) När ankomstintensiteten är mycket låg så kommer tiden i systemet för en kund nästan alltid att vara = betjäningstiden. Därför kan vi lösa av medelbetjäningstiden genom att se vad medeltiden i systemet är när ankomstintensiteten är mycket liten. Ur diagrammet (vid  $\lambda = 0$ ) ser vi att medelbetjäningstiden  $= \bar{x}$  är 1 sekund.

- (b) När ankomstintensiteten är mycket hög så kommer systemet nästan alltid att vara fullt. En kund som kommer in i systemet hamnar nästan alltid på den sista köplatsen. Kunden måste alltså först vänta på att de  $L$  kunderna före honom ska bli färdiga innan han börjar betjänas. Därefter ska kunden själv betjänas innan han lämnar systemet. Det betyder att kunden i medeltal tillbringar tiden  $(L + 1)\bar{x}$  i systemet. Om vi tittar i diagrammet ser vi att för mycket stora värden på ankomstintensiteten så är medeltiden i systemet 4 sekunder. Det betyder att

$$(L + 1)\bar{x} = 4 \Rightarrow L = 3$$

5. (a) Markovkedjan blir



Snittmetoden ger tillståndsekvationerna

$$\begin{aligned} \mu p_1 &= \lambda p_0 \\ 2\mu p_2 &= \lambda(p_0 + p_1) \\ 3\mu p_3 &= \lambda(p_1 + p_2) \\ 4\mu p_4 &= \lambda(p_2 + p_3) \\ &\vdots \\ k\mu p_k &= \lambda(p_{k-2} + p_{k-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- (b) Vi multiplicerar ekvation  $k$  med  $z^k$  vilket ger

$$\begin{aligned} \mu p_1 z &= \lambda p_0 z \\ 2\mu p_2 z^2 &= \lambda(p_0 + p_1)z^2 \\ 3\mu p_3 z^3 &= \lambda(p_1 + p_2)z^3 \\ 4\mu p_4 z^4 &= \lambda(p_2 + p_3)z^4 \\ &\vdots \\ k\mu p_k z^k &= \lambda(p_{k-2} + p_{k-1})z^k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Därefter summerar vi alla ekvationerna. Resultatet är

$$\mu z \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1} = \lambda \left[ p_0 z + z^2 \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k + z \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \right]$$

Vi observerar att

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1}$$

Insatt ovan ger det

$$\mu z P'(z) = \lambda z [p_0 + zP(z) + P(z) - p_0] = \lambda z(1+z)P(z)$$

Differentialekvationen är således efter hyfsning

$$\mu P'(z) = \lambda(1+z)P(z)$$

(c) Deriverar man  $P(z) = Ce^{\lambda(z+z^2/2)/\mu}$  så blir resultatet

$$P'(z) = \frac{C\lambda(1+z)e^{\lambda(z+z^2/2)/\mu}}{\mu}$$

Insättning visar att differentialekvationen satisfieras.

(d) För att bestämma värdet på  $C$  använder vi att  $P(z) \rightarrow 1$  då  $z \rightarrow 1$ . Det ger

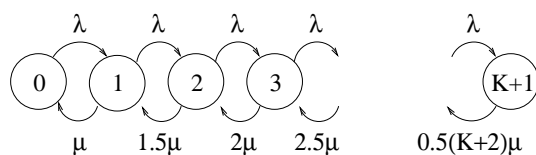
$$Ce^{\lambda(1+1/2)/\mu} = 1 \Rightarrow C = e^{-1.5\lambda/\mu}$$

(e) Vi deriverar  $P(z)$  och låter sedan  $z \rightarrow 1$  för att bestämma medelantal kunder:

$$\lim_{z \rightarrow 1} P'(z) = C \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot 2 \cdot e^{1.5\lambda/\mu} = \frac{2\lambda}{\mu}$$

(f) Eftersom det finns oändligt många betjänares så blir systemet inte instabilt. Det finns inget värde på  $\lambda$  för vilket medelantal kunder  $= \infty$ .

6. (a) Markovkedjan blir



Om vi sätter  $\rho = \lambda/\mu$  så ger snittmetoden för  $k \geq 0$

$$\lambda p_{k-1} = \frac{(k+1)\mu}{2} p_k \Rightarrow p_k = \frac{2\rho p_{k-1}}{k+1} = \frac{(2\rho)^2 p_{k-2}}{(k+1)k} = \dots = \frac{(2\rho)^k}{(k+1)!} p_0$$

Sedan bestämmer vi  $p_0$

$$\sum_{k=0}^{K+1} \frac{(2\rho)^k}{(k+1)!} p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \left( \sum_{k=0}^{K+1} \frac{(2\rho)^k}{(k+1)!} \right)^{-1}$$

Denna summa kan inte förenklas. Svaret blir således

$$p_k = \frac{(2\rho)^k}{(k+1)!} \left( \sum_{k=0}^{K+1} \frac{(2\rho)^k}{(k+1)!} \right)^{-1}$$

(b) Medelantalet spärrade ankomster per tidsenhet blir  $\lambda p_{K+1}$ .

(c) Om det befinner sig  $k$  ( $k \geq 1$ ) kunder i systemet så finns det  $k-1$  kunder i kön. Var och en av dessa kunder lämnar kön med intensiteten  $\mu/2$ , så den sammanlagda intensiteten med vilken kunder lämnar systemet innan de har kommit fram till betjänares är då

$$\frac{(k-1)\mu}{2}$$

Det innebär att medelvärdet av antal kunder som per tidsenhet lämnar systemet för att de blir otåliga blir

$$\sum_{k=1}^{K+1} \frac{(k-1)\mu}{2} p_k$$