Övning 2

Vad du ska kunna efter denna övning

- Kunna använda *Littles sats* för enkla räkningar påkösystem.
- Känna till begreppen *ankomstintensitet*, *avgångsintensitet*, *medelavstånd mellan ankomster* och *medelbetjäningstid* och sambanden mellan dem.
- Kunna redogöra för begreppen *stabilitet* och *instabilitet* för kösystem. Känna till hur stabilitet och instabilitet är relaterade till ankomst- och avgångsintensitet.
- Beräkna *tillståndsfördelningen* för enkla markovska köer med hjälp av *snittmetoden* och *flödein-flödeutmetoden*.
- Beräkna medeltid i systemet och medelväntetid i enkla markovska köer.

Problem, nivå A

1. Antag att du får en fil med mätvärden från en webbsite. I filen finns det 2478 poster, var och en av dem innehåller tiden när en kund kom. Den första kunden kom klockan 13.44.18 och den sista kom 14.56.45.
   (a) Vad var medelankomstintensiteten?
   (b) Man har också uppmätt medelantal kunder i systemet till 2.7. Mätningarna visar att systemet inte är överbelastat och att inga kunder spärras. Hur lång har svarstiden i medeltal varit?
2. Mätningar visar att ankomstintensiteten till ett kösystem är 7.1 s^{-1}, att inga kunder spärras, att medeltiden i systemet är 10 sekunder och att systemet är stabilt. Betjäningstiden är 4 sekunder.
   (a) Hur många betjänare måste kösystemet minst innehålla?
   (b) Hur många kunder finns i medeltal i systemet?
   (c) Hur många kunder blir i medeltal färdigbetjänade under en halvtimme?
3. Betrakta ett M/M/1-system med parametrarna λ och μ och låt $\rho = \lambda/\mu$.
   (a) Bestäm tillståndsfördelningen.
   (b) Låt $\rho = 0.9$. Vad blir medelantal kunder i systemet?
   (c) Låt $\rho = 0.9$. Vad blir medelantal kunder som väntar i kön?
   (d) Vilket är det mest troliga antalet kunder i systemet?
   (e) Låt oss antaga att antalet köplatser är begränsat till L. Vad blir medelväntetiden i kön när $\lambda \to \infty$?
4. Betrakta ett M/M/1-system med begränsad kö. Det kan finnas högst L kunder i systemet.
   (a) Rita tillståndsdiagram och bestäm tillståndsfördelningen.

(b) Beräkna medelantal kunder i systemet.

(c) Beräkna medeltiden som en kund tillbringar i systemet.

Problem, nivå B

5. Antag att vi vill modellera ett datorsystem med hjälp av en kömodell. Vi mäter trafiken till systemet och finner att det i medel kommer A jobb per sekund. Vi mäter också hur lång tid det tar för systemet att behandla varje jobb, och kommer fram till att medelbetjäningstiden för ett jobb är B sekunder.

   (a) Antag att det finns en CPU i datorn som kan behandla jobb, och att denna CPU kan modelleras som en betjänare. För vilka A är systemet stabilt?

   (b) Antag istället att datorn är ett multiprocessorsystem, med m CPU:er som var och en kan behandla jobb (dessa modelleras som m betjänare). För vilka A är nu systemet stabilt?

   (c) Antag att systemet kan modelleras med en oändlig kö och att stabilitetskravet är uppfyllt. I medel, hur många jobb blir färdigbetjänade per sekund? Detta mått kallas också för genomströmning (på engelska: throughput).

   (d) Vilka krav måste ankomstprocessen och betjäningstiderna uppfylla för att vi ska kunna använda en M/M/m-modell när vi analyserar systemet?

   (e) Vilka krav måste ankomstprocessen och betjäningstiderna uppfylla för att vi istället ska kunna använda en M/G/m-modell?

   (f) Vi mäter nu antalet jobb som antingen betjänas eller väntar på betjäning. Vi kommer fram till att det i medel finns N requests i systemet. Bestäm hur lång medelsvarstiden är för datorsystemet, dvs hur lång tid i medel det tar från det att ett jobb kommer till systemet, tills dess att detta jobb är färdigbetjänat (antag att kön är oändlig).

6. I ett system finns det inga köplatser, vilket innebär att alla kunder som kommer till systemet när det är fullt spärras. Mätningar visar att ankomstintensiteten till systemet är 8 s^{-1}, medelbetjäningstiden är 3 sekunder och medelantal upptagna betjänare är 18.

   (a) Vad blir sannolikheten att en kund spärras?

   (b) Hur många kunder per sekund blir färdigbetjänade av systemet?

7. Betrakta ett M/M/1-system med ankomstintensitet λ och betjäningsintensitet μ. Beräkna $E(N)$, $E(N^2)$ och $V(N)$.

Problem, nivå C

8. För ett kösystem med en betjänare gäller

$$
\begin{aligned}
\lambda_k &= \frac{\lambda}{k+1} \\
\mu_k &= \mu
\end{aligned}
$$

där k är antalet kunder i kösystemet.

(a) Rita tillståndsdiagrammet för systemet.

(b) Bestäm tillståndsekvationerna och beräkna tillståndsfördelningen.

(c) Beräkna medelantal kunder i systemet.

9. Betrakta ett M/M/1-system med en köplats. Ankomstintensiteten är 2 s^{-1} och medelbetjäningstiden är 1 s.

(a) Bestäm den stationära tillståndsfördelningen.

(b) Bestäm medelvärde och varians för antalet kunder i systemet.

(c) Låt T vara en stokastisk variabel som anger tiden i systemet för en godtycklig kund som betjänas. Bestäm Laplacetransformen för T.

Lösningar till övning 2

1. (a) Tiden som förflyter under mätningen är 1 timme 12 minuter och 27 sekunder vilket är 4347 sekunder. Medelankomstintensiteten blir således

$$\frac{2478}{4347} \approx 0.57\ \mathrm{s}^{-1}$$

(b) Vi använder Littles sats. Den ger

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{2.7}{0.57} \approx 4.7\ \mathrm{s}$$

Eftersom inga kunder avvisas så är $\lambda_{\text{eff}} = \lambda$.

2. (a) En betjänare kan högst betjäna $1/4 = 0.25$ kunder per sekund. Det innebär att för att betjäna 7.1 kunder per sekund (= ankomstintensiteten) behövs det minst

$$\frac{7.1}{0.25} = 28.4$$

betjänare. Eftersom antalet betjänare alltid är ett heltal så behövs det minst 29 betjänare.

(b) Littles sats ger

$$N = \lambda T = 7.1 \cdot 10 = 71$$

Eftersom inga kunder avvisas så är $\lambda_{\text{eff}} = \lambda$.

(c) Eftersom kösystemet är stabilt så kommer avgångsintensiteten att vara lika med ankomstintensiteten. Under en halvtimma (= 1800 sekunder) så blir då i medeltal $1800 \cdot 7.1 = 12780$ kunder färdigbetjänade.

3. (a) Se läroboken sidan 62 - 68.

(b) Vi använder formeln

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.9}{1-0.9} = 9$$

(c) Vi har

$$N = N_q + N_s \Rightarrow N_q = N - N_s$$

Enligt Littles sats så är

$$N_s = \lambda \cdot \overline{x} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

Således blir

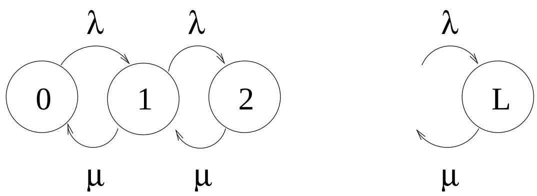
$$N_q = N - N_s = 9 - 0.9 = 8.1$$

(d) Det troligaste tillståndet är det tillstånd för vilket p_k har sitt största värde. Nu vet vi att $p_k = \rho^k(1-\rho)$. Eftersom $0 \leq \rho < 1$ så antar p_k sitt största värde för $k = 0$.

(e) När $\lambda \to \infty$ så är systemet alltid fullt. Så snart en kund är färdigbetjänad och lämnar systemet så kommer en ny kund. Denna kund måste vänta på att L kunder ($L-1$ som är framför den i kön och 1 i betjänaren) ska bli färdiga innan den kan påbörja sin egen betjäning. Medelväntetiden i kön blir

$$L \cdot \overline{x} = \frac{L}{\mu}$$

4. (a) Vi får följande tillståndsgraf:



Snittmetoden ger ekvationerna

$$\begin{aligned}
\lambda p_0 &= \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0 \\
\lambda p_1 &= \mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \rho^2 p_0 \\
&\vdots \\
\lambda p_{L-1} &= \mu p_L \Rightarrow p_L = \frac{\lambda}{\mu} p_{L-1} = \rho^L p_0
\end{aligned}$$

Vi löser ut p_0 på följande sätt

$$\sum_{k=0}^{L} \rho^k p_0 = 1 \Rightarrow p_0 \frac{1-\rho^{L+1}}{1-\rho} = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{L+1}}$$

Det ger slutligen

$$p_k = \frac{1-\rho}{1-\rho^{L+1}} \rho^k$$

(b) Det enklaste är att först z-transformera och sedan derivera. Definitionen av z-transformen ger

$$P(z) = \sum_{k=0}^{L} z^k p_k = p_0 \sum_{k=0}^{L} (\rho z)^k = p_0 \frac{1-(\rho z)^{L+1}}{1-\rho z}$$

När vi ska derivera så är det enklare att först multiplicera bägge leden i ekvationen ovan med $1-\rho z$ och därefter derivera. Det ger

$$\begin{aligned}
&(1-\rho z)P(z) = (1-(\rho z)^{L+1})p_0 \\
&\Rightarrow \\
&-\rho P(z) + (1-\rho z)P'(z) = -(L+1)\rho^{L+1} z^L p_0
\end{aligned}$$

Låter vi nu $z \to 1$ så får vi

$$-\rho \cdot 1 + (1-\rho)\overline{N} = -(L+1)\rho^{L+1} p_0 \Rightarrow N = \frac{\rho - (L+1)\rho^{L+1} p_0}{1-\rho}$$

(c) Använd Littles sats. Vi får

$$T = \frac{N}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{N}{(1-p_L)\lambda}$$

Här är både N, p_L och λ kända.

5. (a) För att ett system ska vara stabilt så måste ankomstintensiteten (λ) vara mindre än den totala betjäningsintensiteten ($m\mu$ där m är antalet betjänare). I vårt fall har vi

$$\lambda = A \tag{1}$$

$$\mu = \frac{1}{B}, \text{ eftersom } B \text{ är betjäningstiden} \tag{2}$$

Eftersom vi bara har en betjänare så är $m = 1$ vilket ger

$$\lambda < m\mu \Rightarrow A < \frac{1}{B}$$

(b) Nu får vi i stället

$$\lambda < m\mu \Rightarrow A < \frac{m}{B}$$

(c) Om det kommer λ kunder per sekund så måste det också komma ut λ kunder per sekund i medeltal. Så genomströmningen blir λ.

(d) Ankomstprocessen måste vara en Poissonprocess och betjäningstiderna måste vara exponentialfördelade och oberoende av varandra.

(e) Ankomstprocessen måste vara en Poissonprocess, betjäningstiderna kan ha en godtycklig fördelning, dock måste de vara oberoende av varandra.

(f) Om kön är oändlig så avvisas inga kunder. Det innebär att $\lambda_{\text{eff}} = \lambda$. Littles sats ger då

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{N}{A}$$

6. (a) Först måste vi beräkna λ_{eff}. För att göra det använder vi Littles sats

$$N = \lambda_{\text{eff}} T \Rightarrow \lambda_{\text{eff}} = \frac{N}{T} = \frac{18}{3} = 6$$

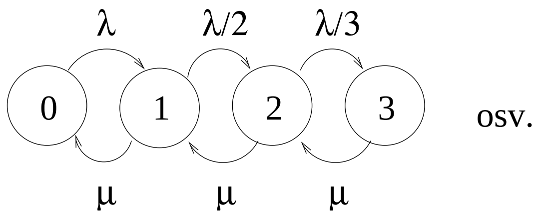
Spärrsannolikheten blir då

$$P(\text{spärr}) = \frac{\lambda - \lambda_{\text{eff}}}{\lambda} = \frac{2}{8} = 0.25$$

(b) Medelantal kunder som per sekund blir färdigbetjänade är $\lambda_{\text{eff}} = 6$.

7. För medelvärdet, se läroboken sidorna 62-71. För variansen och andramomentet, se övning 1b, problem 1c. Enda skillnaden är att ρ där kallas p.

8. (a) Tillståndsdiagrammet blir



(b) Snittmetoden ger

$$\begin{aligned}
\lambda p_0 &= \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \rho p_0 \\
\frac{\lambda}{2} p_1 &= \mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\rho^2}{2} p_0 \\
&\vdots \\
\frac{\lambda}{k} p_k &= \mu p_{k-1} \Rightarrow p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0
\end{aligned}$$

Summan av alla sannolikheter blir

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} p_0 = e^{\rho} p_0$$

Eftersom summan av alla sannolikheter måste vara 1 så blir

$$e^{\rho} p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = e^{-\rho} \Rightarrow p_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$$

(c) Vi z-transformerar

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = e^{-\rho} e^{\rho z} = e^{\rho(z-1)}$$

Sedan deriverar vi och låter $z \to 1$

$$P'(z) = \rho e^{\rho(z-1)} \to \rho \text{ då } z \to 1$$

Medelvärdet av antalet kunder i systemet blir således ρ.

9. (a) Vi ställer upp tillståndsekvationerna med snittmetoden. Det ger

$$\begin{aligned} 2 \cdot p_0 &= 1 \cdot p_1 \Rightarrow p_1 = 2p_0 \\ 2 \cdot p_1 &= 1 \cdot p_2 \Rightarrow p_2 = 2p_1 = 4p_0 \end{aligned}$$

Vi bestämmer p_0:

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow (1+2+4)p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{7}$$

Slutligen

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{7} \\ p_1 &= \frac{2}{7} \\ p_2 &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

(b) Vi använder definitionen av medelvärdet vilken ger

$$E(N) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = \frac{10}{7}$$

För att kunna bestämma variansen så beräknar vi först andramomentet

$$E(N^2) = 0^2 \cdot p_0 + 1^2 \cdot p_1 + 2^2 \cdot p_2 = \frac{18}{7}$$

Variansen blir då

$$V(N) = E(N^2) - E^2(N) = \frac{26}{49}$$

(c) Om en kund kommer till systemet när det är tomt så består tiden i systemet av en betjäningstid, nämligen kundens egen betjäningstid. Finns det en annan kund i systemet så består tiden i systemet av två betjäningstider. Vi definierar händelserna $A =$ ej spärr och $B_i =$ det finns i kunder i systemet. Observera att $P(A \text{ och } B_i) = P(B_i)$ för $i = 0$ och 1. Vidare så är

$$P(A) = 1 - p_2 = \frac{3}{7}$$

Nu får vi

$$\begin{aligned} P(B_0|A) &= \frac{P(B_0 \text{ och } A)}{P(A)} = \frac{P(B_0)}{P(A)} = \frac{1}{3} \\ P(B_1|A) &= \frac{P(B_1 \text{ och } A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)}{P(A)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Laplacetransformen för en betjäningstid är

$$\frac{\mu}{\mu+s} = \frac{1}{1+s}$$

Laplacetransformen för en kunds tid i systemet om kunden verkligen kommer in i kösystemet blir då

$$\frac{1}{1+s} \cdot P(B_0|A) + \left(\frac{1}{1+s}\right)^2 \cdot P(B_1|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+s} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{1+s}\right)^2$$