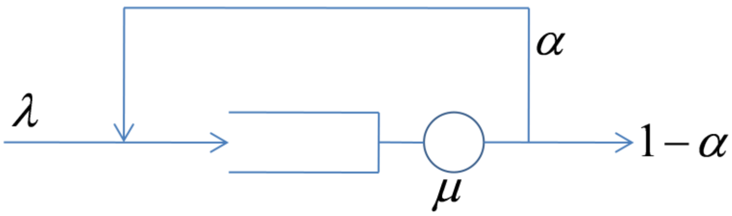
Föreläsning 6, Kösystem våren 2008

I förra föreläsningen såg vi att om man

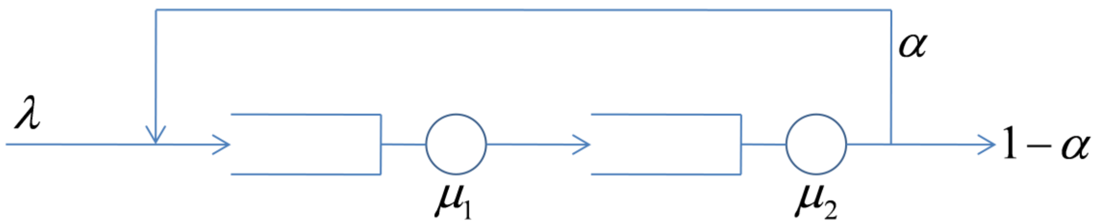
1. Skickar in en Poissonprocess i ett M/M/1-system så får man ut en Poissonprocess
2. Lägger samman flera Poissonprocesser så får man en Poissonprocess
3. Splittrar upp Poissonprocesser slumpmässigt så får man nya Poissonprocesser

Detta gör att vi enkelt kan räkna på könät som innehåller M/M/1-system och som inte har några återkopplingar. Men så snart man inför återkopplingar så har man inte längre Poissonprocesser i könätet. Det kan man göras troligt på följande sätt. Antag att vi har ett kösystem med en återkoppling så som visas i figuren nedan.



Antag vidare att ankomstintensiteten är mycket liten i förhållande till betjäningsintensiteten och att sannolikheten för återkoppling är mycket stor. Då kommer avgångsprocessen från betjänaren att se ut så här: för det mesta kommer det inga kunder. När någon kund kommer utifrån så kommer det att bli en massa avgångar väldigt snabbt (det är samma kund som återkopplas, med stor sannolikhet många gånger eftersom återkopplingssannolikheten är stor). Det innebär att om vi har haft en avgång från betjänaren så är det stor sannolikhet att vi inom kort kommer att få en ny avgång. Omvänt, om vi inte har haft någon avgång så är det stor sannolikhet att det dröjer ganska länge för då finns förmodligen ingen kund i kösystemet och då måste man vänta på en ankomst (och ankomstintensiteten var låg). Det innebär att man har nytta av att känna till historien för att förutsäga framtiden, vilket innebär att det inte kan vara en poissonprocess.

Dock visar det sig att man kan räkna på könät med återkoppling på samma sätt som om de inte har återkoppling. Ganska konstigt, men så är det. Att visa detta i det allmänna fallet gör vi inte i denna kurs. Vi tittade på ett specialfall som såg ut på följande sätt:



Man kan rita en markovkedja i två dimensioner för att beskriva detta kösystem. Om vi kunde räkna på dessa kösystem som om det vore poissonprocesser som kom till dem så skulle vi ha att

$$P(k_1, k_2) = P(k_1) \cdot P(k_2) = (1-\rho_1)\rho_1^{k_1} \cdot (1-\rho_2)\rho_2^{k_2} \qquad (1)$$

Här är $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ och

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \alpha}$$

Man kan kolla att flöde in = flöde ut för alla tillstånd uppfylls av denna sannolikhetsfördelning. Det innebär att man kan räkna på systemet som om det vore M/M/1-köer även med återkoppling.

Ett exempel på detta är att om vi tittar på ett tillstånd där $k_1 > 0$ och $k_2 > 0$ så ser flöde in flöde ut på följande sätt:

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(k_1, k_2) = \lambda P(k_1 - 1, k_2) + \mu_1 P(k_1 + 1, k_2 - 1) + \mu_2 P(k_1, k_2 + 1) \qquad (2)$$

Sätter vi in (1) i (2) och förenklar så ser man att (1) är en lösning till (2).

Liknande räkningar kan man göra i ett allmänt fall. Det blir mer beteckningar och index i formlerna men i princip gör man på samma sätt för att visa att man kan räkna som för ett M/M/1-system även i de fallen.