

# Föreläsning 4, Kösystem

## Poissonprocessen

Vi har ju antagit att tiderna mellan ankomster till ett kösystem är exponentialfördelade. Om man hela tiden har samma ankomstintensitet så kallas en sådan ankomstprocess för **poissonprocess**. Man kan visa att följande tre sätt att definiera är ekvivalenta:

1. Om tiden mellan ankomster är exponentialfördelade med samma medelvärde så bildar ankomsterna en poissonprocess.
2. Om antalet ankomster i ett tidsintervall är poissonfördelade så bildar ankomsterna en poissonprocess. Att antalet ankomster är poissonfördelat innebär att om tidsintervallet har längden  $t$  och  $N$  är antalet ankomster under intervallet så är

$$P(N = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

3. Låt  $I = [t, t + \Delta t]$  vara ett intervall och låt  $N$  vara antalet ankomster i detta intervall. Om det då gäller att

$$P(N = 0) = 1 - \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(N = 1) = \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(N > 1) = o(\Delta t)$$

så bildar ankomsterna en poissonprocess.  $o(\Delta t)$  är en godtycklig funktion som har egenskapen att

$$\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0 \text{ då } \Delta t \rightarrow 0$$

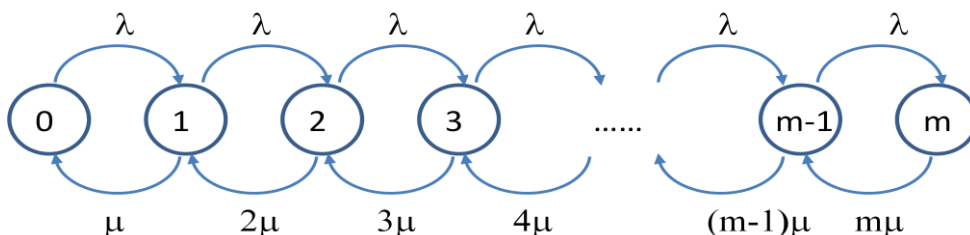
Poissonprocessen är minneslös vilket innebär att tiden till nästa ankomst efter en tidpunkt alltid är exponentialfördelad med samma medelvärde oavsett när den förra ankomsten ägde rum.

## Upptagetsystem

Ett upptagetsystem har inga köplatser, det finns bara betjänare.

## Erlangsystemet

Om det finns  $m$  betjänare och inga köplatser, ankomsterna är en Poissonprocess med ankomstintensitet  $\lambda$  oavsett hur många som finns i systemet och om betjäningstiderna är exponentialfördelade med medelvärdet  $1/\mu$  så kalas kösystemet för ett Erlangsystem. Det är ofta en bra approximation om vi har många kunder i förhållande till antalet betjänare. Systemets markovkedja ser ut så här:



Om vi använder snittmetoden som vanligt så får vi

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$$

$$\lambda p_1 = 2\mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\rho^2}{2} p_0$$

$$\lambda p_2 = 3\mu p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\rho^3}{3!} p_0$$

Man inser att i det generella fallet gäller

Om alla  $\lambda_k = \lambda$  så blir P(spärr) betydligt enklare:

$$P(\text{spärr}) = \frac{\lambda p_n}{\sum_{k=0}^n \lambda p_k} = \frac{p_n}{\sum_{k=0}^n p_k} = p_n$$

Detta beror på att  $\sum_{k=0}^n p_k = 1$ , summan av alla sannolikheter blir ju 1.

En terminologi som är en smula förvirrande men som ändå används ibland är att P(spärr) kallas **anropsspärr** och att  $p_n$  kallas **tidsspärr**.