Föreläsning 5, Kösystem

M/G/1

Hittills har vi, när vi behandlar kösystem med matematiska metoder, antagit att tiderna mellan händelser är exponentialfördelade. Då kan vi använda en markovkedja för att beskriva ett kösystem och beräkna prestanda hos det. Simulering gör det möjligt för oss att ha godtyckliga betjäningstidsfördelningar. Men det finns också matematiska resultat för kösystem som inte kan beskrivas med markovkedjor. I denna föreläsning ska vi behandla M/G/1-systemet. Det har följande egenskaper:

- Ankomsterna är en poissonprocess med intensitet λ som är konstant och inte beror på hur många kunder det finns i systemet.
- Det finns en betjänare och betjäningstiden har en godtycklig men känd fördelning.
- Det finns oändligt många buffertplatser.

Vi ska härleda en formel för medelantalet kunder i detta system. Vi använder de vanliga beteckningarna:

$N =$ antal kunder i kösystemet (som är en stokastisk variabel)

$T =$ tiden som en kund tillbringar i kösystemet (som är en stokastisk variabel)

$X =$ en betjäningstid (som är en stokastisk variabel)

Vi känner till fördelningen för X vilket innebär att vi kan beräkna $E(X)$ och $E(X^2)$. Dessutom är λ känd. Observera också att $E(N) = \lambda E(T)$ eftersom inga kunder avvisas på grund av den oändliga bufferten.

Låt oss titta på en kund som kommer till systemet. Hur lång tid i den tillbringar i systemet beror på hur många kunder som redan finns i systemet vid ankomsten det vill säga på N. Om $N = 0$ så börjar kunden att betjänas med en gång och tiden i systemet blir en betjäningstid. Om $N = 1$ så håller en kund på att betjänas vid ankomsten och då blir tiden i systemet den återstående betjäningstiden för den som betjänas plus kundens egen betjäningstid. Därför är det en bra ide att införa följande stokastiska variabel:

$R =$ den återstående betjäningstiden för en eventuell kund som håller på att betjänas vid en ankomst

Nu får vi:

$E(T|N = 0) = E(X)$

$E(T|N = 1) = E(X) + E(R)$

$E(T|N = 2) = 2E(X) + E(R)$

och så vidare. Man inser att i det i det allmänna fallet gäller

$E(T|N = k) = kE(X) + E(R)$ för $k \geq 1$

Nu tar vi bort betinget:

$$E(T) = \sum_{k=0}^{\infty} E(T|N=k)P(N=k) = E(T|N=0)P(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} [kE(X) + E(R)]P(N=k) =$$

$$E(X)P(N=0) + E(X)\sum_{k=1}^{\infty} kP(N=k) + E(R)\sum_{k=1}^{\infty} P(N=k) =$$

$$E(X)P(N=0) + E(X)E(N) + E(R)(1 - P(N=0)) \qquad (1)$$

Nu beräknar vi $P(N=0)$ genom att använda Littles sats för att beräkna medelantal kunder i betjänaren, $E(N_s)$, på två sätt:

$$E(N_s) = 0 \cdot P(N_s = 0) + 1 \cdot P(N_s = 1) = P(N_s = 1) = 1 - P(N = 0)$$

$$E(N_s) = \lambda E(X) = \rho$$

Detta leder till att

$$1 - P(N=0) = \rho$$

Sätter vi in detta i (1) ovan så får vi

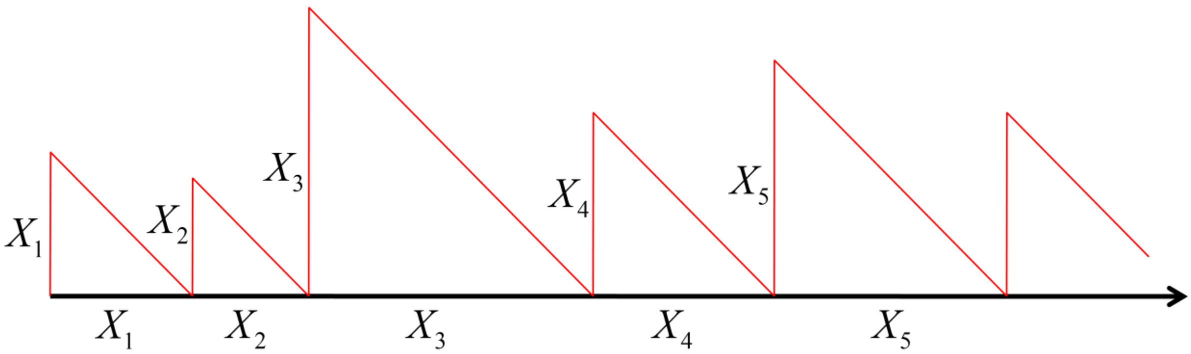
$$E(T) = (1-\rho)E(X) + E(X)E(N) + \rho E(R) \qquad (2)$$

Dessutom har vi att $E(N) = \lambda E(T)$ vilket insatt i (2) ger oss

$$E(T) = (1-\rho)E(X) + E(X)\lambda E(T) + \rho E(R) = (1-\rho)E(X) + \rho E(T) + \rho E(R) \qquad (3)$$

Vi har utnyttjat att $\rho = \lambda E(X)$.

Nu återstår att beräkna $E(R)$. Detta gör vi med ett geometriskt resonemang. Vi drar en massa betjäningstider $(X_1, X_2, \dots)$ och markerar deras längd på en tidsaxel. Därefter ritar vi rätvinkliga trianglar längs tidsaxeln som i figuren nedan. Trianglarnas höjd är = betjäningstiden.



Om vi nu väljer en godtycklig tidpunkt på tidsaxeln så visar den röda kurvan hur mycket av den pågående bejäningstiden som är kvar. Vi beräknar medelhöjden för denna kurva genom att först beräkna den totala arean under kurvan fram till slutet av betjäningstiden för kund nummer n och sedan dela med tiden som har förflutit fram till slutet av den betjäningstiden. Det ger en uppskattning av $E(R)$ som blir allt bättre ju större n är. Vi får således

$$E(R) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2/2}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)/n}{2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)/n} = \frac{E(X^2)}{2E(X)}$$

Nu kan vi sätta in detta resultat i formel (3) ovan. Det ger

$$E(T) = (1-\rho)E(X) + \rho E(T) + \rho \frac{E(X^2)}{2E(X)}$$

Om vi observerar att $\rho/E(X) = \lambda$ så får vi slutligen

$$E(T) = E(X) + \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)}$$

Genom multiplikation med λ så får vi också

$$E(N) = \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)}$$