Övning 1(a)

Vad du ska kunna efter denna övning

- Redogöra för begreppen *diskret* och *kontinuerlig stokastisk variabel*.
- Definiera *fördelningsfunktionen* för en stokastisk variabel.
- Definiera *frekvensfunktionen* för en stokastisk variabel.
- Beräkna *medelvärde* och *varians* för en stokastisk variabel.
- Definiera *betingad sannolikhet* och *ta bort beting*.

Övningar märkta med (*) rekommenderades.

Problem, nivå A

1. * Antag att det för ett mynt gäller att $P(\text{klave}) = p$. Kasta myntet tills du har fått klave n gånger. Låt N vara antalet kast som du har gjort. Beräkna medelvärdet för N.

2. * Låt X och Y vara två diskreta stokastiska variabler som bara kan anta värdena 0 och 1. Vi vet att
   $P(X = 0, Y = 0) = 1/2$ $\quad$ $P(X = 1, Y = 0) = 1/8$
   $P(X = 0, Y = 1) = 1/4$ $\quad$ $P(X = 1, Y = 1) = 1/8$
   Beräkna följande:
   (a) $P(X = 0)$
   (b) $P(X = 1|Y = 0)$
   (c) $P(Y = 0|X = 1)$
   (d) $E(Y)$
   (e) $E(XY)$
   (f) $E(X|Y = 0)$
   (g) $E(Y|X = 1)$

3. * Låt X vara en kontinuerlig, positiv stokastisk variabel med fördelningsfunktionen

   $$F_X(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

   (a) Beräkna medelvärdet av X.
   (b) Beräkna variansen av X.

4. Bestäm frekvensfunktionen för den diskreta stokastiska variabeln N som antar värden ≥ 0 då

   $$P(N = k|X = t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k \geq 0$$

$f_X(t) = \mu e^{-\mu t}$ (frekvensfunktionen för X)

X är en positiv, kontinuerlig stokastisk variabel.

Problem, nivå B

5. I en urna finns tre tärningar med följande egenskaper:

	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	P(6)
Tärning 1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Tärning 2	3/12	2/12	2/12	1/12	1/12	3/12
Tärning 3	2/12	3/12	1/12	2/12	3/12	1/12

   (a) Antag att man väljer en tärning på slump. Vad är sannolikheten att få en sexa om man kastar tärningen?

   (b) Antag att man väljer två tärningar på slump. Vad är sannolikheten att få två sexor om man kastar tärningarna?

6. * En fånge är placerad i en cell som har tre dörrar. Den första dörren för honom omedelbart till friheten. Den andra leder honom till en tunnel som för honom tillbaka till cellen efter en dags vandring. Den tredje leder till en tunnel som för honom tillbaka till cellen efter tre dagars vandring. Om han kommer tillbaka till cellen väljer han på nytt en dörr helt på slump det vill säga han lär sig aldrig av sina misstag. Hur lång tid kommer det i medeltal ta innan fången når friheten?

7. * Låt n vara antalet ankomster till ett system under en dag. Varje ankomst medför en last.

   (a) Antag att lasterna är oberoende likafördelade stokastiska variabler med medelvärde $E(X)$ och varians $V(X)$. Bestäm medelvärde och varians för den totala lasten som kommer till systemet under en dag.

   (b) Antag i stället att alla ankomsterna under en dag medför samma last som den första ankomsten. Antag att den första ankomsten har medelvärde $E(X)$ och variansen $V(X)$. Vad blir då medelvärdet och variansen för den totala lasten som kommer under en dag?

Problem, nivå C

8. Antag att A och B är två diskreta stokastiska variabler för vilka gäller

$$P(A = 1, B = 0) = 0,3$$
$$P(A = 1, B = 1) = 0,2$$
$$P(A = 2, B = 0) = 0,1$$
$$P(A = 3, B = 0) = 0,4$$

   (a) Beräkna medelvärdet av A.

   (b) Beräkna medelvärdet av B.

   (c) Är A och B oberoende?

(d) Beräkna medelvärdet av AB.

9. En positiv, kontinuerlig stokastisk variabel X har fördelningsfunktionen

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

dvs den är exponentialfördelad. Bestäm

$$P(X \leq x_0 + x | X > x)$$

10. Låt A och B vara oberoende, diskreta stokastiska variabler ($A, B \in \{0, 1, 2, \ldots\}$) med frekvensfunktionerna

$$P(A = k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a} \text{ respektive } P(B = k) = \frac{b^k}{k!}e^{-b}$$

(a) Beräkna medelvärdet av A.

(b) Beräkna frekvensfunktionen för $A + B$.

(c) Beräkna $P(A = k|A + B = n)$ om $k \leq n$.

Lösningar till övning 1

1. Vi kan se försöket att singla slant tills vi får klave för n:te gången som en sammansättning av n delförsök där man i vart och ett av delförsöken kastar tills man får klave för första gången. Dessa delförsök har alla samma fördelning. Om vi antar att N_i är antalet kast i delförsök i så får vi

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i \Rightarrow E(N) = \sum_{i=1}^{n} E(N_i) = nE(N_1)$$

eftersom alla N_i har samma fördelning och därmed samma medelvärde. Låt oss nu beräkna medelvärdet för N_1. För att göra det behöver vi N_1:s frekvensfunktion. Om vi ska få den första klaven vid det k:te försöket måste vi först få $k - 1$ kronor. Sannolikheten för detta blir

$$P(N_1 = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

Observera att k är minst 1 eftersom det krävs minst ett kast för att få en klave. För att få enklare beteckningar sätter vi $q = 1 - p$. Definitionen av medelvärde ger

$$\begin{aligned} E(N_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(N_1 = k) = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \\ &= p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^k = p\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} \\ &= p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Slutligen får vi alltså

$$E(N) = \frac{n}{p}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X=1|Y=0) &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} \\ &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=0)} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(Y=0|X=1) &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1)} \\ &= \frac{P(X=1,Y=0)}{1-P(X=0)}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)=P(Y=1) \\ &= P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=\frac{3}{8} \end{aligned}$$

(e) X och Y kan bara anta värdena 0 och 1 vilket medför att deras produkt också bara kan anta värdena 0 och 1. Definitionen på medelvärde ger då

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0\cdot P(XY=0)+1\cdot P(XY=1)=P(XY=1) \\ &= P(X=1,Y=1)=\frac{1}{8} \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} E(X|Y=0) &= 0\cdot P(X=0|Y=0)+1\cdot P(X=1|Y=0) \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} E(Y|X=1) &= 0\cdot P(Y=0|X=1) \\ &\quad +1\cdot P(Y=1|X=1) \\ &= P(Y=1|X=1)=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. För att kunna beräkna medelvärde och varians så måste vi börja med att derivera fördelningsfunktionen så att vi får frekvensfunktionen

$$f_X(t)=\frac{d}{dt}F_X(t)=\mu e^{-\mu t}$$

(a)

$$E(X) = \int_0^\infty t f_X(t) dt = \int_0^\infty t \mu e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu}$$

(b) Vi börjar med att beräkna andramomentet

$$E(X^2) = \int_0^\infty t^2 \mu e^{-\mu t} dt = \frac{2}{\mu^2}$$

Sedan får vi

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}$$

I denna uppgift använder vi att

$$\int_0^\infty t^k e^{-at} dt = \frac{k!}{a^{k+1}} \tag{1}$$

Denna formel finns i formelsamlingen.

4. Vi tar bort betinget

$$\begin{aligned} P(N = k) &= \int_0^\infty P(N = k | X = t) f_X(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \frac{\mu}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

Även i denna uppgift har vi använt formel (1) från lösningen på föregående uppgift.

5. (a) Låt oss sätta $P(k|i) = P(\text{man får } k | \text{man väljer tärning } i)$. Det ger oss

$$P(6) = \sum_{i=1}^{3} P(6|i) P(\text{väljer } i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(b) Nu sätter vi i stället $P(66|ij) = P(\text{får två sexor} | \text{väljer tärningarna } i \text{ och } j)$. Det ger

$$\begin{aligned} P(66) &= \sum_{i,j} P(66|ij) P(\text{väljer } i \text{ och } j) \\ &= P(66|12) \cdot \frac{1}{3} + P(66|13) \cdot \frac{1}{3} + P(66|23) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{11}{432} \end{aligned}$$

6. Antag att T är tiden det tar innan fången blir fri. Om fången väljer en dörr så att han kommer tillbaka till cellen väljer han en ny dörr helt på slump. Det gör att medelvärdet av den återstående tiden har samma fördelning och därmed samma medelvärde som T. Antag att $E(T|i) = E(T|\text{väljer dörr } i \text{ första gången})$. Det ger oss följande ekvationer

$$\begin{aligned} E(T|1) &= 0 \\ E(T|2) &= 1 + E(T) \\ E(T|3) &= 3 + E(T) \end{aligned}$$

Om vi nu tar bort betingen så får vi:

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{i=1}^{3} E(T|i) P(\text{väljer } i) = \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + (1 + E(T)) \cdot \frac{1}{3} + (3 + E(T)) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4 + 2E(T)}{3} \end{aligned}$$

Denna ekvation löses enkelt och ger

$$E(T) = 4$$

7. Låt lasten som varje ankomst för med sig vara $X_1 \ldots X_n$ och den totala lasten vara X.

   (a) Medelvärden är alltid additiva

   $$E(X) = E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = nE(X_1)$$

   Eftersom $X_1 \ldots X_n$ är oberoende av varandra kan vi summera varianserna

   $$V(X) = V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = nV(X_1)$$

   (b) För medelvärdet får man samma svar som i (a)-uppgiften. Däremot blir svaret för variansen inte samma, för nu är ju inte $X_1 \ldots X_n$ oberoende av varandra. Nu får vi i stället

   $$V(X) = V(nX_1) = n^2 V(X_1)$$

8. (a)

   $$\begin{aligned} E(A) &= 1 \cdot P(A = 1) + 2 \cdot P(A = 2) + 3 \cdot P(A = 3) = \\ &= P(A = 1, B = 0) + P(A = 1, B = 1) \\ &\quad + 2 \cdot P(A = 2, B = 0) + 3 \cdot P(A = 3, B = 0) = 1,9 \end{aligned}$$

   (b)

   $$\begin{aligned} E(B) &= 0 \cdot P(B = 0) + 1 \cdot P(B = 1) = \\ &= P(B = 1) = P(A = 1, B = 1) = 0,2 \end{aligned}$$

   (c) Om $B = 1$ så måste ju $A = 1$. Därför kan A och B ej vara oberoende.

(d) Den första frågan man ska ställa sig är vilka värden som AB kan anta. Det finns bara fyra kombinationer av värden på A och B som har sannolikhet större än 0. Av dessa är det tre där $AB = 0$, nämligen de där $B = 0$. Den fjärde kombinationen är $A = 1$ och $B = 1$ och då är $AB = 1$. Detta ger oss

$$\begin{aligned} E(AB) &= 0 \cdot P(AB = 0) + 1 \cdot P(AB = 1) = \\ &= P(A = 1, B = 1) = 0,2 \end{aligned}$$

9. Definitionen av beting ger oss

$$\begin{aligned} P(X \le x_0 + x | X > x) &= \frac{P(X \le x_0 + x, X > x)}{P(X > x)} = \\ &= \frac{P(x < X \le x_0 + x)}{P(X > x)} \end{aligned}$$

Nu kan vi använda att

$$\begin{aligned} P(a < X \le b) &= \int_a^b f_X(t)dt = \\ &= \int_0^b f_X(t)dt - \int_0^a f_X(t)dt = \\ &= F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

Sätter vi in detta i täljaren ovan får vi

$$\begin{aligned} P(X \le x_0 + x | X > x) &= \frac{F_X(x_0 + x) - F_X(x)}{P(X > x)} = \\ &= \frac{(1 - F_X(x)) - (1 - F_X(x_0 + x))}{1 - F_X(x)} = \\ &= 1 - \frac{e^{-\lambda(x_0+x)}}{e^{-\lambda x}} = 1 - e^{-\lambda x_0} \end{aligned}$$

Detta är ett viktigt resultat. Det säger att den återstående tiden har samma fördelning som den ursprungliga tiden. Man säger att exponentialfördelningen är minneslös.

10. (a) Vi använder definitionen av medelvärde

$$\begin{aligned} E(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{a^k}{k!} e^{-a} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \\ &= a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-a} = a e^{-a} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = a e^{-a} e^{a} = a \end{aligned}$$

(b) Först konstaterar vi att

$$P(A + B = k) = \sum_{i=0}^{k} P(A + B = k | B = i) P(B = i)$$

Eftersom A och B är oberoende av varandra så är dessutom

$$\begin{aligned}
P(A+B=k|B=i) &= \frac{P(A+B=k,B=i)}{P(B=i)} \\
&= \frac{P(A=k-i,B=i)}{P(B=i)} = \\
&= \frac{P(A=k-i)P(B=i)}{P(B=i)} \\
&= P(A=k-i)
\end{aligned}$$

Sätter vi in detta ovan så får vi

$$\begin{aligned}
P(A+B=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(A=k-i)P(B=i) = \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{a^{k-i}}{(k-i)!}e^{-a}\frac{b^i}{i!}e^{-b} = \\
&= \frac{e^{-(a+b)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} a^{k-i}b^i \\
&= \frac{(a+b)^k}{k!}e^{-(a+b)}
\end{aligned}$$

Summan är alltså också poissonfördelad med medelvärde $a+b$

(c)

$$\begin{aligned}
P(A=k|A+B=n) &= \frac{P(A=k,A+B=n)}{P(A+B=n)} \\
&= \frac{P(A=k,B=n-k)}{P(A+B=n)} \\
&= \frac{a^k}{k!}e^{-a}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}e^{-b}\frac{n!}{(a+b)^n}e^{a+b} \\
&= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}
\end{aligned}$$

Detta gäller om $k \leq n$.

Övning 1(b)

Vad du ska kunna efter denna övning

- Kunna definiera *laplacetransformen* för en kontinuerlig stokastisk variabel.
- Kunna definiera *z-transformen* för en diskret stokastisk variabel.
- Kunna beräkna medelvärde, andramoment och varians för stokastiska variabler med hjälp av transformerna.
- Kunna beräkna laplace- och z-transformen för summor av oberoende stokastiska variabler.

En fråga som vi ofta får är hur man ska tolka transformerna. I signalbehandling kan man ju ibland ge en fysisk motsvarighet till en transform, t ex så ger ju fouriertransformen en signals spektrum. Någon sådan enkel tolkning finns inte för våra transformer. Se dem bara som matematiska hjälpmedel som gör det lättare att lösa problem!

Övningar märkta med (*) rekommenderades.

Problem, nivå A

1. * Låt N vara en diskret stokastisk variabel för vilken

$$P(N = k) = p^k(1 - p), k \geq 0$$

   (a) Beräkna z-transformen för N.
   (b) Beräkna medelvärdet för N med hjälp av z-transformen.
   (c) Beräkna variansen för N med hjälp av z-transformen.

2. * Låt X och Y vara två oberoende positiva och kontinuerliga stokastiska variabler med frekvensfunktionerna

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

$$f_Y(t) = \delta(t - 1/\mu)$$

   (a) Beräkna medelvärdet för X med laplacetransformen.
   (b) Beräkna variansen för X med laplacetransformen.
   (c) Bestäm frekvensfunktionen för $Z = X + Y$ med laplacetransformer.

3. För en födelse-dödsprocess i kontinuerlig tid med tre tillstånd gäller att $q_{21} = \mu$ och $q_{23} = \lambda$. Visa att tiden i tillstånd 2 är exponentialfördelad med medelvärdet

$$\frac{1}{\lambda + \mu}$$

Problem, nivå B

4. Låt X vara en likformigt fördelad stokastisk variabel som kan anta värden mellan 0 och 1.

   (a) Beräkna X:s laplacetransform.

   (b) Använd laplacetransformen för att beräkna medelvärdet för X.

   (c) Beräkna medelvärdet utan att använda laplacetransformen.

5. * Vi singlar slant n gånger. Varje gång vi får klave drar vi ett exponentialfördelat tal med medelvärdet $1/\lambda$. Efter de n slantsinglingarna summerar vi alla de dragna talen. Låt oss kalla summan X.

   (a) Beräkna laplacetransformen för X.

   (b) Beräkna medelvärdet för X.

Problem, nivå C

6. Antag att intensiteterna som står på utpilarna från ett tillstånd i en markovkedja är numrerade $1 \ldots n$ och att intensiteten på utpil nummer i är λ_i. Visa att sannolikheten att man lämnar tillståndet via pil i är

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{\forall j} \lambda_j}$$

7. Z-transformen för antalet kunder som kommer till ett kösystem under en dag är

$$\frac{1-p}{1-pz}$$

   Varje kund medför ett arbete som varar en exponentialfördelad tid med medelvärde $1/\mu$.

   (a) Hur mycket arbete kommer det i medeltal på en dag?

   (b) Vad är laplacetransformen för allt arbete som kommer under en dag?

Lösningar till övning 2

1. Detta är nästan samma problem som i tal 1 i Övning 1. Som ni kommer att se så blir det mycket lättare att lösa när man använder z-transformen i stället för att använda definitionerna.

   (a) Vi beräknar N:s z-transform:

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (1-p)p^k \\ &= (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} (pz)^k = \frac{1-p}{1-pz} \end{aligned}$$

(b) Vi deriverar en gång:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\frac{1-p}{1-pz} &= \frac{-(-p)(1-p)}{(1-pz)^2} = \frac{p(1-p)}{(1-pz)^2} \\ &\to \frac{p(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p} \text{ då } z \to 1\end{aligned}$$

Således är medelvärdet

$$\frac{p}{1-p}$$

(c) Ytterligare en derivering ger

$$\frac{d^2}{dz^2}\frac{1-p}{1-pz} = \frac{2p^2(1-p)}{(1-pz)^3} \to \frac{2p^2}{(1-p)^2} \text{ då } z \to 1$$

Detta innebär att

$$E(N^2) - E(N) = \frac{2p^2}{(1-p)^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$E(N^2) = \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{p}{1-p} = \frac{p+p^2}{(1-p)^2}$$

Slutligen får vi

$$V(N) = E(N^2) - E^2(N) = \frac{p+p^2}{(1-p)^2} - \frac{p^2}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)^2}$$

2. Vi börjar med att beräkna laplacetransformerna för X och Y. Definitionen ger

$$F_X^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_X(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$F_Y^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_Y(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-1/\mu)dt = e^{-s/\mu}$$

I formelsamlingen finns en tabell över de viktigaste laplacetransformerna. Använd gärna den när du löser problem.

(a) En derivering ger

$$\frac{d}{ds}F_X^*(s) = -\frac{\lambda}{(\lambda+s)^2} \to -\frac{1}{\lambda} \text{ då } s \to 0$$

Således blir

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

(b) Vi deriverar ytterligare en gång

$$\frac{d^2}{ds^2}F_X^*(s) = \frac{2\lambda}{(\lambda+s)^3} \to \frac{2}{\lambda^2} \text{ då } s \to 0$$

Det innebär att

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(c) Eftersom X och Y är oberoende så får vi Z:s laplacetransform som produkten av X:s och Y:s laplacetransformer. Det ger

$$F_Z^*(s) = \frac{\lambda e^{-s/\mu}}{\lambda + s}$$

En titt i formelsamlingen visar att

$$f(t-a) \xrightarrow{L} e^{-as} F^*(s)$$

Detta ger att

$$f_Z(t) = \lambda e^{-\lambda(t-1/\mu)}$$

3. Tiden i ett tillstånd kan inte bero på vad som händer när man väl har lämnat tillståndet. Låt oss därför antaga att utintensiteterna från tillstånd 1 och 3 är 0 det vill säga de är absorberande tillstånd. Om vi startar denna process i tillstånd 2, så måste fördelningen för tiden i tillstånd 2 vara samma som i den ursprungliga födelse-dödsprocessen. Den nya processen har följande Q-matris

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$p^{'}(t) = p(t) \cdot Q \Rightarrow p_2^{'}(t) = -(\mu + \lambda) p_2(t) \Rightarrow p_2(t) = C e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Eftersom processen startar i tillstånd 2 så måste det gälla att

$$p_2(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

Om X är tiden i tillstånd 2 så gäller alltså

$$F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - P(X > t) = 1 - p_2(t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Detta innebär att X är exponentialfördelad med medelvärde $1/(\lambda + \mu)$.

4. (a) Frekvensfunktionen för en likformigt fördelad variabel som kan anta värden mellan 0 och 1 är

$$f_X(t) = \begin{cases} 1 \text{ om } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

Om vi definierar

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 \text{ om } t \geq 0 \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

så kan vi skriva

$$f_X(t) = \Theta(t) - \Theta(t-1)$$

En titt i tabellen över laplacetransformer avslöjar att

$$Ae^{-at}\Theta(t) \overset{L}{\to} \frac{A}{a+s}$$

Sätter vi $a = 0$ och $A = 1$ så ger det att

$$\Theta(t) \overset{L}{\to} \frac{1}{s}$$

Dessutom gäller att

$$f(t-a) \overset{L}{\to} e^{-as}F^*(s)$$

vilket slutligen ger

$$f_X(t) \overset{L}{\to} F_X^*(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

(b) Vi deriverar Laplacetransformen en gång för att beräkna medelvärdet

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}F_X^*(s) &= \frac{1}{s} \cdot e^{-s} - \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s}) = \frac{se^{-s} - 1 + e^{-s}}{s^2} \\
&= \frac{s(1 - s + \frac{s^2}{2} + O(s^3)) - 1 + 1 - s + \frac{s^2}{2} + O(s^3)}{s^2} \\
&= \frac{-\frac{s^2}{2} + O(s^3)}{s^2} = -\frac{1}{2} + O(s) \to -\frac{1}{2} \text{ då } s \to 0
\end{aligned}$$

Således är

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

(c) Vi använder definitionen av medelvärde

$$E(X) = \int_0^\infty t f_X(t)dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

Här är det faktiskt mycket enklare att inte använda laplacetransformen.

5. (a) Antag att $A =$ antalet gånger vi får klave när vi singlar slant. A kommer då att vara binomialfördelad med frekvensfunktionen

$$P(A = i) = \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i},\ 0 \le i \le n$$

Antag nu att det blir i klavar när vi singlar slant. Då kommer X att vara summan av i oberoende stokastiska variabler var och en med laplacetransformen

$$\frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Det innebär att

$$F_X^*(s|A = i) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^i$$

Vi tar bort betinget

$$\begin{aligned} F_X^*(s) &= \sum_{i=0}^{n} F_X^*(s|A=i)P(A=i) && (1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i(1-p)^{n-i} && (2) \\ &= \left(\frac{\lambda p}{\lambda+s} + 1 - p\right)^n && (3) \end{aligned}$$

(b) Vi beräknar medelvärdet genom att derivera och låta $s \to 0$

$$\frac{d}{ds}F_X^*(s) = -\frac{\lambda p}{(\lambda+s)^2} \cdot n \cdot \left(\frac{\lambda p}{\lambda+s} + 1 - p\right)^{n-1} \to -\frac{np}{\lambda} \text{ då } s \to 0$$

Således blir

$$E(X) = \frac{np}{\lambda}$$

6. Låt oss för enkelhetens skull titta på ett tillstånd som har två utpilar och härleda resultatet för detta specialfall. Vi plockar ut tillståndet ur den ursprungliga markovkedjan och gör en ny markovkedja som består av tre tillstånd: tillstånd 0 (som är det ursprungliga), tillstånd 1 och tillstånd 2. Det går en pil från tillstånd 0 till tillstånd 1 på vilken det står λ_1 och en från tillstånd 0 till tillstånd 2 på vilken det står λ_2. Antag vidare att tillstånd 1 och 2 är absorberande, dvs man lämnar aldrig tillståndet när man har hamnat i det och att markovkedjan startar i tillstånd 0. Sannolikheten att man absorberas i tillstånd i i denna nya markovkedja är detsamma som sannolikheten att man lämnar tillstånd 0 via pil i. Dessutom inser man att sannolikheten att man lämnar tillstånd 0 via pil i i den nya markovkedjan är lika med sannolikheten att man lämnar tillstånd 0 via pil i i den ursprungliga markovkedjan. Q-matrisen för den nya markovkedjan är

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vilket leder till ekvationssystemet

$$p^{'}(t) = p(t)Q \Rightarrow \begin{cases} p_0^{'}(t) = -(\lambda_1+\lambda_2)p_0(t) \\ p_1^{'}(t) = \lambda_1 p_0(t) \\ p_2^{'}(t) = \lambda_2 p_0(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$ och $p_2 0 = 0$ eftersom den nya kedjan börjar i tillstånd 0. Först löser vi ekvationen för $p_0(t)$

$$p_0^{'}(t) = -(\lambda_1+\lambda_2)p_0(t) \Rightarrow p_0(t) = Ce^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

Begynnelsevillkoret $p_0(0) = 1$ ger sedan $C = 1$. Insättning av $p_0(t)$ i ekvationen $p_1^{'}(t) = \lambda_1 p_0(t)$ ger nu

$$p_1^{'}(t) = \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \Rightarrow p_1(t) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + A$$

Begynnelsevillkoret $p_1(0) = 0$ ger

$$A = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Man kan beräkna $p_2(t)$ på samma sätt som $p_1(t)$. Detta ger

$$\begin{aligned}
p_0(t) &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \to 0 \text{ då } t \to \infty \\
p_1(t) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right) \to \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \text{ då } t \to \infty \\
p_2(t) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right) \to \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \text{ då } t \to \infty
\end{aligned}$$

Detta måste innebära att man hoppar till tillstånd $i, i = 1, 2$ med just sannolikheten

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Man kan generalisera detta till godtyckligt antal utpilar från ett tillstånd.

7. Låt oss införa beteckningarna

$$\begin{aligned}
X &= \text{totala mängden arbete som kommer under en dag} \\
N &= \text{antalet ankomster under en dag}
\end{aligned}$$

(a) Om det kommer k kunder under en dag så är medelvärdet av den ankommande arbetsmängden k/μ. Det innebär att

$$E(X|N = k) = \frac{k}{\mu}$$

Vi tar bort betinget

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{\forall k} E(X|N = k)P(N = k) = \sum_{\forall k} \frac{k}{\mu} P(N = k) \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_{\forall k} kP(N = k) = \frac{E(N)}{\mu}
\end{aligned}$$

Nu återstår att beräkna $E(N)$. Vi gör detta genom att derivera z-transformen och låta $z \to 1$.

$$\frac{d}{dz}\frac{1-p}{1-pz} = \frac{p(1-p)}{(1-pz)^2} \to \frac{p}{1-p} \text{ då } z \to 1$$

Svaret blir således

$$E(X) = \frac{p}{\mu(1-p)}$$

(b) Laplacetransformen för en stokastisk variabel med medelvärde $1/\mu$ är

$$\frac{\mu}{\mu + s}$$

Laplacetransformen för summan av k sådana stokastiska variabler får man genom att multiplicera k sådana laplacetransformer vilket ger

$$F_X^*(s|N = k) = \left(\frac{\mu}{\mu + s}\right)^k$$

Nu tar vi bort betinget

$$\begin{aligned} F_X^*(s) &= \sum_{\forall k} F_X^*(s|N = k)P(N = k) = \sum_{\forall k} \left(\frac{\mu}{\mu + s}\right)^k P(N = k) \\ &= P_N(\frac{\mu}{\mu + s}) = \frac{(1 - p)(\mu + s)}{\mu + s - p\mu} \end{aligned}$$