Övning 9

Vad du ska kunna efter denna övning

- Kunna beräkna medelantal kunder för alla köer i ett könät med återkopplingar.
- Kunna beräkna medeltiden som en kund tillbringar i ett könät med återkopplingar.

I denna övning kallas ett kösystem som ingår i ett könät oftast *nod*.

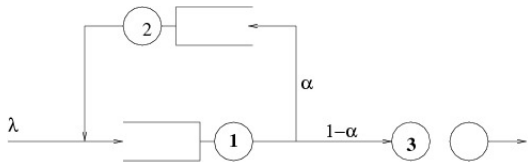
Problem

1. Könätet nedan beskriver ett datorsystem. Till könätet kommer jobb i enlighet med en Poissonprocess med medelvärde λ jobb per tidsenhet. Ett jobb som är färdigbetjänat i nod 1 fortsätter med sannolikheten α till nod 2 och med sannolikheten $1-\alpha$ till nod 3. Nod 3 är ett upptagetsystem med två betjänare. Låt $\alpha = 0.4$, $\lambda = 0.75$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1.5$ samt $\mu_3 = 3$

   (a) Bestäm ankomstintensiteten till alla noderna. Bestäm också intensiteten med vilken kunder blir färdigbetjänade i nod 3.

   (b) Bestäm medelantal jobb i könätet.

   (c) Bestäm medelsvarstiden i könätet för ett jobb som inte spärras.



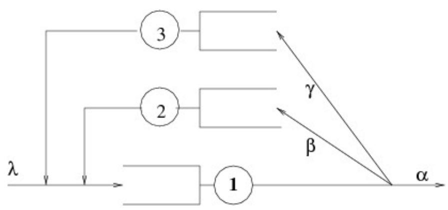
2. Könätet nedan består av tre M/M/1-köer. Betjäningsintensiteten i nod i är μ_i. Nya jobb kommer till könätet med intensiteten λ. Jobb som blir färdiga i nod 1 kan lämna könätet eller återkopplas till nod 2 eller 3. Sannolikheterna för detta är α, β respektive γ där $\alpha+\beta+\gamma = 1$. Vi antar att ingen nod är överbelastad.

   (a) Beräkna λ_k = ankomstintensiteten till nod i för alla i.

   (b) Beräkna medelantalet jobb i könätet.

   (c) Beräkna medeltiden i könätet för en godtycklig kund.

   (d) Beräkna medelantalet jobb som lämnar könätet per tidsenhet.



3. Kunder kommer till ett könät med M noder som alla är M/M/1-system. Ankomsterna bildar en Poissonprocess med intensiteten λ. En kund som kommer till könätet går till nod i med sannolikheten p_i. När en kund

är färdigbetjänad i en nod lämnar den könätet med sannolikheten $1 - \alpha$ och med sannolikheten α går kunden tillbaka till en av noderna. Kunden väljer då ånyo nod i med sannolikheten p_i. Antag att $p_i = 1/M$ och att alla betjäningsintensiteten är μ i alla kösystemen.

(a) Bestäm ankomstintensiteten till nod i.

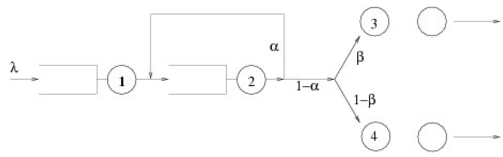
(b) Bestäm medeltiden i könätet för en godtycklig kund.

(c) Bestäm sannolikheten att ett jobb aldrig blir betjänat av nod 1.

4. Betrakta könätet i figuren nedan. Nod 1 och 2 är M/M/1-system och nod 3 och 4 är upptagetsystem med m betjänare. Betjäningsintensiteten i nod i är μ_i.

(a) Beräkna medelantal kunder i alla noderna.

(b) Beräkna medeltiden i hela kösystemet för de kunder som får fullständig betjäning.

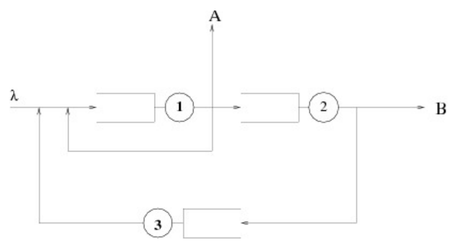


5. Betrakta nedanstående könät. Alla betjäningstider är exponentialfördelade och har medelvärdet 1. Dessutom är $p_{11} = 0.1$, $p_{12} = 0.8$ och $p_{23} = 0.5$.

(a) Bestäm ett värde på λ så att belastningen på den högst belastade betjänaren är 0.9.

(b) Beräkna sannolikheten att en kund lämnar könätet vid A respektive B.

(c) Beräkna medelantal betjäningar som en kund får innan den lämnar könätet.



6. Vi har ett könät med två noder som bägge är M/M/1-system. En kund som lämnar nod 1 fortsätter alltid till nod 2 och en kund som lämnar nod 2 fortsätter alltid till nod 1. Inga nya kunder kommer till nätet och inga kunder lämnar nätet. Antag att det finns M kunder i nätet och att betjäningsintensiteterna i noderna är μ_1 respektive μ_2.

(a) Sätt $P(k_1, k_2)$ = sannolikheten att det finns k_1 kunder i nod 1 och k_2 kunder i nod 2. Beräkna $P(k_1, k_2)$.

(b) Beräkna belastningen på betjänaren i nod 1. Belasting = andel av tiden som betjänaren jobbar = medelantal kunder som finns i betjänaren.

(c) Beräkna hur många kunder som i medeltal blir färdigbetjänade i nod 2 per tidsenhet.

Lösningar

1. (a) Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda + \lambda_2 \\ \lambda_2 &= \alpha\lambda_1 \\ \lambda_3 &= (1-\alpha)\lambda_1\end{aligned}$$

Vilket har lösningen

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1-\alpha} = \frac{0.75}{1-0.4} = 1.25$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha\lambda}{1-\alpha} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{1-0.4} = 0.5$$

$$\lambda_3 = \lambda = 0.75$$

Intensiteten med vilken kunder blir färdigbetjänade i nod 3 är

$$\Lambda_3 = \lambda_3(1 - E_2(\lambda_3/\mu_3)) = 0.75 \cdot (1 - E_2(0.25)) \approx 0.73$$

(b) De sedvanliga formlerna ger

$$E(N_1) = \frac{\lambda_1/\mu_1}{1-\lambda_1/\mu_1} \approx 1.67$$

$$E(N_2) = \frac{\lambda_2/\mu_2}{1-\lambda_2/\mu_2} = 0.5$$

$$E(N_3) = \rho_3(1 - E_2(\rho_3)) = 0.25(1 - E_2(0.25)) \approx 0.24$$

Det totala antalet jobb blir alltså

$$E(N_1) + E(N_2) + E(N_3) \approx 2.41$$

(c) Fram till nod 3 har alla jobb i medeltal tillbringat samma tid i könätet, nämligen

$$E(T_{12}) = \frac{E(N_1) + E(N_2)}{\lambda} \approx 2.89$$

En kund som inte avvisas tillbringar alltid tiden $1/\mu_3 = 1/3$ i nod 3. Medeltiden i könätet för en kund som inte avvisas blir då

$$E(T_{tot}) = E(T_{12}) + \frac{1}{\mu_3} \approx 3.22$$

2. (a) Vi får ett ekvationssystem

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 &= \beta\lambda_1 \\ \lambda_3 &= \gamma\lambda_1\end{aligned}$$

vilket har lösningen

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{\alpha}$$
$$\lambda_2 = \frac{\beta\lambda}{\alpha}$$
$$\lambda_3 = \frac{\gamma\lambda}{\alpha}$$

(b) Man beräknar först ρ_i och använder sedan den vanliga formeln för M/M/1-system. Det ger

$$E(N_1) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{\lambda_1/\mu_1}{1-\lambda_1/\mu_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1-\lambda_1} = \frac{\lambda}{\alpha\mu_1-\lambda}$$
$$E(N_2) = \frac{\lambda_2}{\mu_2-\lambda_2} = \frac{\beta\lambda}{\alpha\mu_2-\beta\lambda}$$
$$E(N_3) = \frac{\lambda_3}{\mu_3-\lambda_3} = \frac{\gamma\lambda}{\alpha\mu_3-\gamma\lambda}$$

(c) Medeltiden blir enligt Littles sats

$$E(T) = \frac{E(N_1)+E(N_2)+E(N_3)}{\lambda}$$

(d) Ingen nod är överbelastad vilket innebär att i medeltal måste lika många kunder per tidsenhet lämna systemet som det kommer. Svaret är således λ.

3. (a) För nod i får vi ekvationen

$$\lambda_i = p_i\lambda + \sum_{j=1}^{M} \alpha\lambda_j p_i$$

Av symmetriskäl inser man att alla λ_j måste vara lika om alla $p_j = 1/M$. Då får man

$$\lambda_i = p_i\lambda + \sum_{j=1}^{M} \alpha\lambda_i p_i = \frac{\lambda}{M} + \alpha\lambda_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{\lambda}{M(1-\alpha)}$$

(b) Vi bestämmer medelantal kunder i könätet. Medelantal kunder måste vara lika i alla noder så vi får att det totala antalet kunder i könätet blir

$$E(N) = M \cdot E(N_1) = M\frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{M\lambda}{M(1-\alpha)\mu-\lambda}$$

varefter Littles sats ger medeltiden i könätet

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{M}{M(1-\alpha)\mu-\lambda}$$

(c) Låt K vara antalet gånger som ett jobb passerar en godtycklig kö i könätet. K har då en geometrisk fördelning det vill säga

$$P(K = n) = \alpha^{n-1}(1-\alpha),\ n \geq 1$$

Vi sätter $A =$ händelsen att nod 1 inte besöks av en kund. För varje gång ett jobb passerar genom köerna så är sannolikheten att det inte besöker nod 1

$$\frac{M-1}{M}$$

Det ger att

$$P(A|K = n) = \left(\frac{M-1}{M}\right)^n$$

Nu tar vi bort betinget

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A|K=n)P(K=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M-1}{M}\right)^n \alpha^{n-1}(1-\alpha) = \\ &= \frac{M-1}{M}(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M-1}{M}\right)^{n-1}\alpha^{n-1} = \\ &= \frac{M-1}{M}(1-\alpha)\frac{M}{M-\alpha(M-1)} = \frac{(M-1)(1-\alpha)}{M-\alpha(M-1)} \end{aligned}$$

4. (a) Först beräknar vi λ_i och ρ_i för alla noderna

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda \\ &\lambda_2 = \lambda_1 + \alpha\lambda_2 \\ &\lambda_3 = (1-\alpha)\beta\lambda_2 \\ &\lambda_4 = \alpha\beta\lambda_2 \end{aligned}$$

Vilket medför

$$\lambda_1 = \lambda$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda}{1-\alpha}$$

$$\lambda_3 = \beta\lambda$$

$$\lambda_4 = (1-\beta)\lambda$$

och sedan $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ för alla i. Medelantal i noderna blir nu

$$E(N_i) = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \text{ för } i = 1 \text{ och } 2$$

$$E(N_i) = \rho_i(1 - E_{m_i}(\rho_i)) \text{ för } i = 3 \text{ och } 4$$

(b) Fram till det ställe där kunderna delas upp mellan nod 3 och 4 så har alla tillbringat samma medeltid i könätet vare sig de avvisas eller inte. Enligt Littles sats är denna tid

$$E(T_{12}) = \frac{E(N_1) + E(N_2)}{\lambda}$$

Intensiteten med vilken kunder verkligen får komma in till upptaget-systemet blir

$$\Lambda_i = \lambda_i(1 - E_{m_i}(\rho_i)),\ i = 3, 4$$

Sannolikheten att en kund som får betjäning får betjäning i nod 3 blir då

$$T_{tot} = \frac{\Lambda_3}{\Lambda_3 + \Lambda_4}$$

och motsvarande för nod 4. Den totala medeltiden i könätet för en kund som inte avvisas blir då

$$T_{12} + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_3 + \Lambda_4} \cdot \frac{1}{\mu_3} + \frac{\Lambda_4}{\Lambda_3 + \Lambda_4} \cdot \frac{1}{\mu_4}$$

5. (a) För ankomstintensiteterna till noderna får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda + 0.1\lambda_1 + \lambda_3\\ \lambda_2 &= 0.8\lambda_1\\ \lambda_3 &= 0.5\lambda_2\end{aligned}$$

vilket har lösningen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2\lambda\\ \lambda_2 &= 1.6\lambda\\ \lambda_3 &= 0.8\lambda\end{aligned}$$

För alla noderna gällde att $\mu_i = 1$ vilket innebär att $\rho_i = \lambda_i$. Den högst belastade noden är nod 1. Väljer vi $\lambda = 0.45$ så blir belastningen på den 0.9.

(b) Vi beräknar utintensiteten vid A (kalla den λ_A) respektive B (kalla den λ_B). Man får

$$\lambda_A = 0.1\lambda_1 = 0.2\lambda$$

$$\lambda_B = 0.5\lambda_2 = 0.8\lambda$$

Observera att $\lambda_A + \lambda_B = \lambda$. Det ger att sannolikheten att en kund lämnar nätet vid A blir

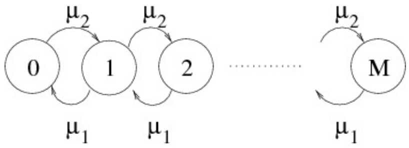
$$\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{0.2\lambda}{\lambda} = 0.2$$

och att den lämnar nätet vid B blir

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{0.8\lambda}{\lambda} = 0.8$$

(c) Eftersom $\lambda_1 = 2\lambda$ så måste varje kund i medeltal besöka nod 1 två gånger under sin tid i nätet. På samma sätt så besöks nod 2 i medeltal 1.6 gånger och nod 3 i medeltal 0.8 gånger under en kunds tid i nätet. En godtycklig kund blir alltså betjänad i medeltal $2 + 1.6 + 0.8 = 4.4$ gånger under sin tid i nätet.

6. (a) Vi observerar att eftersom det alltid finns M kunder i könätet så måste vi ha att $k_1 + k_2 = M$. Det räcker alltså att hitta sannolikheten att det finns k_1 kunder i nod 1. För att göra detta ritar vi en Markovkedja som beskriver antal kunder i nod 1:



Snittmetoden ger oss sedan

$$P(k_1 \text{ i nod } 1) = \rho_1^{k_1} \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{M+1}}$$

där $\rho_1 = \mu_2/\mu_1$. Således gäller

$$P(k_1, k_2) = \rho_1^{k_1} \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{M+1}} \text{ om } k_1 + k_2 = M$$

(b) Belastningen blir

$$1 - P(k_1 = 0) = 1 - \rho_1^0 \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{M+1}} = \frac{1-\rho_1^{M+1} - 1 + \rho_1}{1-\rho_1^{M+1}} = \frac{\rho_1 - \rho_1^{M+1}}{1-\rho_1^{M+1}}$$

(c) Vi använder Littles sats på betjänaren i nod 1. Belastningen på betjänaren är detsamma som medelantalet jobb i betjänaren. Littles sats ger då (om λ_1 är antal som blir färdigbetjänade per tidsenhet i nod 1)

$$1 - P(k_1 = 0) = \lambda_1 \cdot \frac{1}{\mu_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\rho_1 - \rho_1^{M+1}}{1-\rho_1^{M+1}} \cdot \mu_1$$