Föreläsning 1

Motsvarar avsnitten 2.1–2.3 i Griffiths.

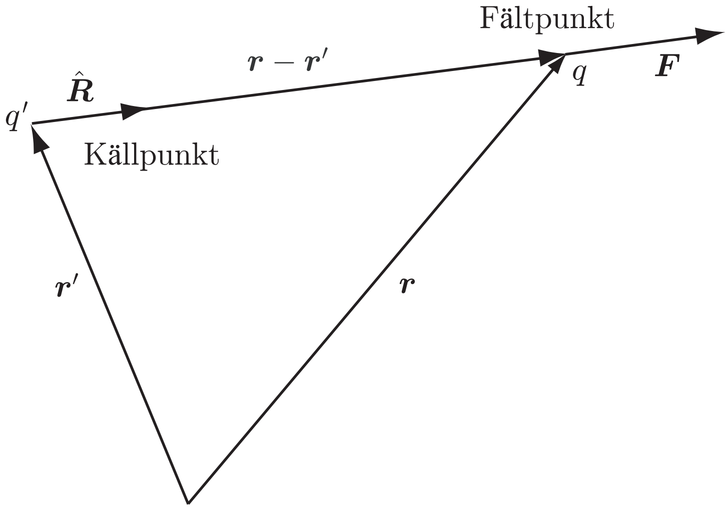
Elektrisk laddning

Två fundamentala begrepp: källor och fält. I elektrostatiken är källan den elektriska laddningen och fältet det elektriska fältet. Två naturlagar för den elektriska laddningen:

1. Laddningen uppträder endast i heltalsmultiplar av fundamentalladdningen
$$e = -1.60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = -1.60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}.$$
Med andra ord är
$$q = ne, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$
2. Laddningen är alltid bevarad (kan ej skapas eller förintas) i ett slutet system.

Coulombs lag

Låt q och q' vara styrkorna på två punktladdningar i punkterna $\boldsymbol{r}$ respektive $\boldsymbol{r}'$.



Coulombs lag ger kraften på punktladdningen med styrkan q som punktladdningen med styrkan q' ger upphov till:
$$\boldsymbol{F} = q\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}.$$
Här betecknar $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$As/Vm permittiviteten för frirymd. Ofta införs
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', \quad R = |\boldsymbol{R}|, \quad \hat{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}.$$
Med dessa beteckningar kan kraften alternativt skrivas som
$$\boldsymbol{F} = q\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}. \tag{$\star$}$$

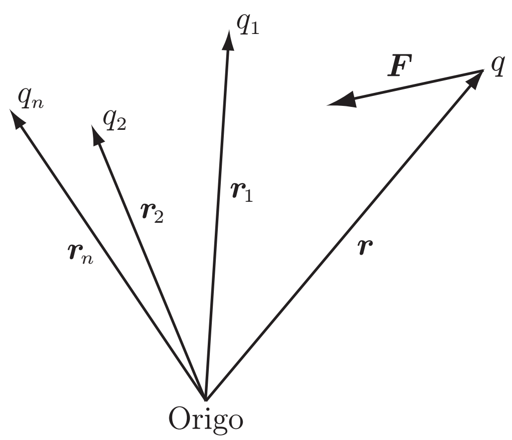
Notera att Griffiths använder $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ istället för $\boldsymbol{R}$. Följande viktiga egenskaper gäller för ($\star$):

1. Kraften är riktad längs sammanbindningslinjen mellan de båda punktladdningarna.
2. Kraften är proportionell mot såväl q som q'.
3. Kraften är attraktiv då $qq' < 0$ och repulsiv då $qq' > 0$. Figuren på föregående sida visar fallet $qq' > 0$.
4. Kraften är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan de båda punktladdningarna.

Kommentar: Det är lätt att det blir fel tecken på kraften. Eftersom punktladdningar med lika tecken repellerar varandra och punktladdningar med olika tecken attraherar varandra kan man i många fall enkelt kontrollera om man har fått rätt tecken på kraften. ♣

Superposition

Antag en punktladdning med styrkan q i punkten $\boldsymbol{r}$ och N andra punktladdningar med styrkorna q_i, $i = 1, 2, \dots, N$, i punkterna $\boldsymbol{r}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.



Superpositionsprincipen ger kraften på punktladdningen med styrkan q som punktladdningarna med styrkorna q_i, $i = 1, 2, \dots, N$, tillsammans ger upphov till:

$$\boldsymbol{F} = q \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3}.$$

Elektriskt fält

Det elektriska fältet i punkten $\boldsymbol{r}$ från en fördelning av punktladdningar med styrkorna q_i, $i = 1, 2, \dots, N$, i punkterna $\boldsymbol{r}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, definieras som

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{q \to 0} \frac{\boldsymbol{F}}{q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3}.$$

Här betecknar $\boldsymbol{F}$ kraften på en punktladdning (även kallad testladdning) med styrkan q i punkten $\boldsymbol{r}$.

Kommentar: Testladdningen påverkar de andra punktladdningarna med krafter. Om testladdningens styrka q inte är liten kan de andra punktladdningarna flytta på sig på grund av den extra kraft de påverkas av från testladdningen. För att förhindra detta behöver q vara infinitesimalt i definitionen ovan. ♣

Exempel: Det elektriska fältet i en punkt $\boldsymbol{r}$ från en punktladdning med styrkan q' i punkten $\boldsymbol{r}'$ är

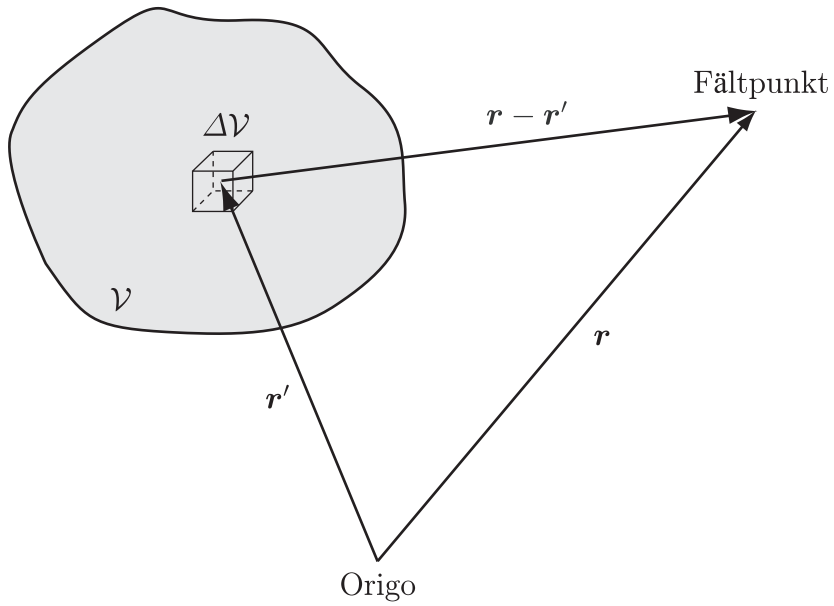
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}.$$

Notera att det elektriska fältet är radiellt och avtar som kvadraten på avståndet. ♣

Kontinuerliga laddningsfördelningar

Vi intresserar oss för tre olika slags kontinuerliga laddningsfördelningar:

Rymdladdning



Rymdladdningstätheten ρ är ett mått på laddningen per volymenhet [As/m^3]. Ett litet volymelement $\Delta\mathcal{V}$ centrerat i punkten $\boldsymbol{r}'$ har laddningen $\Delta q = \rho(\boldsymbol{r}')\Delta\mathcal{V}$. Det elektriska fältet från $\Delta\mathcal{V}$ ges av

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\Delta\mathcal{V}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}.$$

Superposition och gränsövergång i volymen $\mathcal{V}$ ger volymintegralen

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, \mathrm{d}v'.$$

Griffiths betecknar motsvarande volymelement med $d\tau'$. Punkten $\boldsymbol{r}$ där fältet bestäms kallas fältpunkt och punkten $\boldsymbol{r}'$ som sveper över källfördelningen kallas källpunkt.

Ytladdning

Ytladdningstätheten ρ_S är ett mått på laddningen per ytenhet [As/m^2]. Det elektriska fältet från en ytladdningstäthet på ytan $\mathcal{S}$ ges, analogt med ovan, av ytintegralen

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{S}} \rho_S(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}S'.$$

Griffiths betecknar motsvarande ytelement med da'. I formelsamlingen, exempelsamlingen och på föreläsningarna används beteckningen ρ_S för ytladdningstätheten. Griffiths använder σ för att beteckna ytladdningstätheten, men för oss betyder σ elektrisk ledningsförmåga.

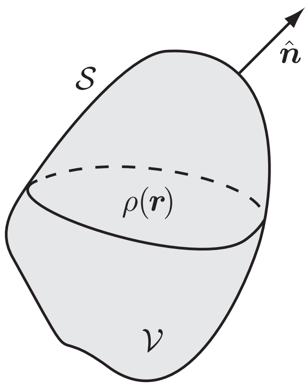
Linjeladdning

Linjeladdningstätheten ρ_ℓ är ett mått på laddningen per längdenhet [As/m]. Det elektriska fältet från en linjeladdningstäthet på kurvan $\mathcal{C}$ ges av linjeintegralen

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{C}} \rho_\ell(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}\ell'.$$

Griffiths betecknar motsvarande linjeelement med dl'. I formelsamlingen, exempelsamlingen och på föreläsningarna används beteckningen ρ_ℓ för linjeladdningstätheten. Griffiths använder λ för att beteckna linjeladdningstätheten, men för oss betyder λ våglängden.

Gauss lag på integralform



Låt $\mathcal{V}$ vara en volym som omsluts av ytan $\mathcal{S}$ med utåtriktad normal $\hat{\boldsymbol{n}}$. Då gäller

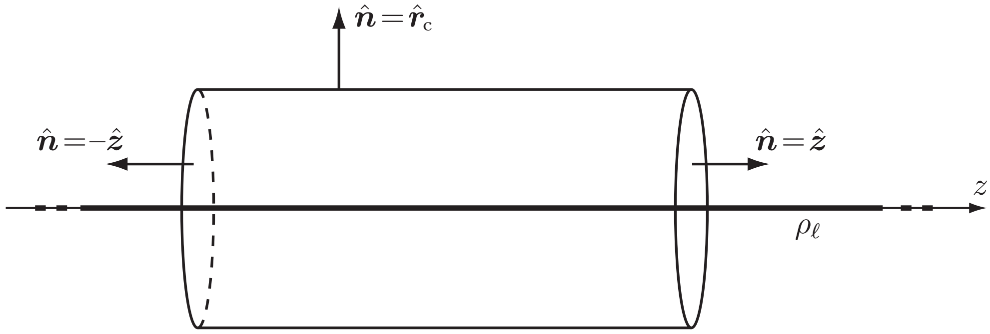
$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v' = \frac{Q_{\text{innanför}}}{\varepsilon_0},$$

där $Q_{\text{innanför}}$ är totala laddningen innanför $\mathcal{S}$. Gauss lag på integralform är lämplig att använda då man skall bestämma elektriska fältet eller elektriska potentialen från en sfäriskt symmetrisk eller axialsymmetrisk laddningsfördelning.

Exempel: Det elektriska fältet från lång rak linjeladdning (se figuren nedan) kan bestämmas med hjälp av Gauss lag på integralform. Resultatet är

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r_c}\hat{\boldsymbol{r}}_c. \qquad (\star\star)$$

Med andra ord är fältet riktat i radiell led i två dimensioner och avtar som ett genom avståndet.



Griffiths använder s som beteckning för avståndet från z-axeln. På föreläsningarna, liksom i exempelsamlingen och formelsamlingen, används beteckningen r_c. ♣

Gauss lag på differentialform

Gauss lag på differentialform lyder

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}.$$

Kommentar: Observera att Gauss lag inte är samma som Gauss sats. Gauss sats är en integralsats som relaterar normalytintegralen av ett vektorfält till volymintegralen av divergensen av vektorfältet. ♣

Elektrisk potential

I tre dimensioner gäller att

$$\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}.$$

Således kan det elektriska fältet skrivas som negativa gradienten på ett skalärfält:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r}).$$

Skalärfältet V kallas elektrisk potential.

Kommentar: Du kan själv kontrollera $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})$ genom att utföra deriveringen i kartesiska koordinater: $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ och $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = (x - x', y - y', z - z')$. ♣

Exempel: Den elektriska potentialen i en punkt $\boldsymbol{r}$ från en punktladdning med styrkan q i punkten $\boldsymbol{r}'$ är

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}.$$

Notera att elektriska potentialen avtar som ett genom avståndet. ♣
För de tre kontinuerliga laddningsfördelningarna ovan har vi:

Rymdladdning

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}v'$$

Ytladdning

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \frac{\rho_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, \mathrm{d}S'$$

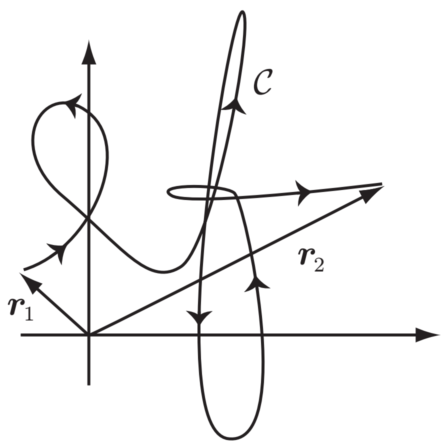
Linjeladdning

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \frac{\rho_{\ell}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, \mathrm{d}\ell' \qquad (\star\star\star)$$

Fältlinjer och ekvipotentialytor

En fältlinje är en linje som i varje punkt har det elektriska fältet som tangent. I elektrostatiken börjar en fältlinje alltid på en positiv laddning och slutar på en negativ laddning. En ekvipotentialyta är en yta på vilken elektriska potentialen är konstant. Fältlinjer och ekvipotentialytor skär varandra med 90° vinkel.

Tangentlinjeintegralen av elektriska fältet



Vi har sett att $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})$. Om denna relation integreras från en punkt $\boldsymbol{r}_1$ till en punkt $\boldsymbol{r}_2$ längs en kurva $\mathcal{C}$ fås

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' = -\int_{\mathcal{C}} \nabla' V(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' = V(\boldsymbol{r}_1) - V(\boldsymbol{r}_2).$$

Med andra ord beror tangentlinjeintegralen av elektriska fältet endast av elektriska potentialens värde i begynnelse- och slutpunkten. Detta är sant för alla konservativa vektorfält, det vill säga alla vektorfält $\boldsymbol{F}$ som satisfierar $\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$. Det elektriska fältet är konservativt eftersom

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\times\nabla V(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{0}.$$

Exempel: Det elektriska fältet från en lång rak linjeladdning ges enligt ($\star\star$) av

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r_{\mathrm{c}}}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}$$

Elektriska potentialskillnaden mellan $r_{\mathrm{c}} = a$ och $r_{\mathrm{c}} = b$ blir därmed

$$V(a) - V(b) = \int_a^b \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{d}r_{\mathrm{c}} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}.$$

Detta är samma resultat som vi får om vi istället beräknar elektriska potentialskillnaden med hjälp av ($\star\star\star$). ♣

Kommentar: En oändligt lång rak linjeladdning kallas ofta för en tvådimensionell punktladdning. Med beteckningarna $\boldsymbol{r}_\mathrm{c} = (x, y)$ för fältpunkten och $\boldsymbol{r}'_\mathrm{c} = (x', y')$ för källpunkten brukar elektriska potentialen från den tvådimensionella punktladdningen definieras som

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{r}_\mathrm{c} - \boldsymbol{r}'_\mathrm{c}|}.$$

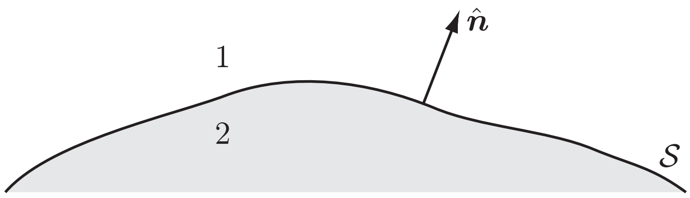
Man ser att argumentet till logaritmfunktionen har dimensionen inverst avstånd och detta kan tyckas konstigt. Förklaringen är att i tvådimensionella problem måste totala laddningen vara noll. Detta gör att logaritmfunktionerna för elektriska potentialen alltid kan kombineras så att de får dimensionslösa argument som i exemplet ovan. ♣

Poissons ekvation

Poissons ekvation erhålls genom att kombinera Gauss lag på differentialform, $\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0$, och $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})$:

$$\nabla^2 V(\boldsymbol{r}) = \nabla \cdot \nabla V(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0.$$

Randvillkor till Poissons ekvation vid en skiljeyta är:



i. Elektriska potentialen är kontinuerlig:

$$V_1(\boldsymbol{r}) - V_2(\boldsymbol{r}) = 0.$$

ii. Normalderivatan av elektriska potentialen är diskontinuerlig med språng $-\rho_\mathrm{S}/\varepsilon_0$:

$$\frac{\partial V_1(\boldsymbol{r})}{\partial n} - \frac{\partial V_2(\boldsymbol{r})}{\partial n} = -\rho_\mathrm{S}(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0$$